

Soluc a P1:

Después de ver que el momento angular se conserva se obtiene con poco trabajo que la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{\rho} = -m\omega^2\rho + \frac{\ell^2}{m\rho^3} \quad (*)$$

donde $\ell = m\rho_0 v_0$. Lo más delicado es darse cuenta que la fuerza del resorte es $-k\rho$ y el largo natural no aparece. Eso se debe a que *el resorte está en su largo natural cuando $\rho = 0$* , es decir, que la fuerza elástica es nula si $\rho = 0$. Las órbitas circunferenciales surgen de exigir que el lado derecho de la ecuación anterior sea nulo, es decir, cuando ρ toma el valor

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\ell}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\rho_0 v_0}{\omega}}, \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{v_0}{\omega}$$

que depende del valor de la velocidad con que se debe lanzar.

La ecuación (*) permite definir un potencial efectivo

$$U = \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 + \frac{\ell^2}{2m\rho^2}$$

y se sabe que la frecuencia de pequeñas oscilaciones está dada por $\sqrt{U''/m}$, donde U'' es la segunda derivada de U con respecto a ρ evaluada en $\rho = \frac{v_0}{\omega}$. Un calculillo permite obtener

$$\omega_{\text{peq. osc.}} = 2\omega$$

que no depende de v_0 .

Soluc P2

El momento angular con respecto al punto de giro es $\ell = \alpha mL^2 \dot{\phi}$. El torque sólo depende del peso de la partícula superior y es fácil ver que es $\tau = L\alpha m \sin \phi$, de aquí que

$$\ddot{\phi} = \frac{\alpha g}{L} \sin \phi \quad (a1)$$

que implica

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2\alpha g}{L} (1 - \cos \phi) \quad (a2)$$

El centro de masa tiene posición

$$\vec{R} = \frac{L}{1+\alpha} \hat{\rho}$$

de donde

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{L}{1+\alpha} (\ddot{\phi} \hat{\phi} - \dot{\phi}^2 \hat{\rho})$$

Usando (a1) y (a2) este vector puede escribirse como función de ϕ .

Por otro lado la fuerza total, que es la que determina el movimiento del centro de masa, es el peso $-(1+\alpha)mg\hat{j}$ y la reacción en el vértice. Tal reacción puede pensarse como la normal horizontal, $N_h\hat{i}$, más la normal vertical $N_v\hat{j}$, donde

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \\ \hat{\phi} &= \hat{i} \cos \phi - \hat{j} \sin \phi \end{aligned}$$

Mientras la masa de abajo continua pegada la ecuación de movimiento es $(1+\alpha)m\ddot{\vec{R}} = M\vec{g} + \vec{N}_h + \vec{N}_v$ que se descompone en sus partes horizontal y vertical.

Un poco de álgebra permite reducir la ecuación asociada a la dirección horizontal a

$$N_h = \alpha mg \sin \phi (3 \cos \phi - 2)$$

que permite que no se despegue de la pared vertical si se cumple que $\cos \phi \geq \frac{2}{3}$. La condición no depende de α .

El movimiento vertical conduce a

$$N_v = mg (3\alpha \cos^2 \phi - 2\alpha \cos \phi + 1)$$

Se puede comprobar que esta relación es siempre positiva si $\alpha \leq 3$. Si α sobrepasa el valor 3, se despegue del suelo cuando se cumple que

$$\cos \phi \geq \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

Por ejemplo, si $\alpha = 4$ se obtiene $\cos \phi = \frac{1}{2}$. En general este coseno es siempre menor a $\frac{2}{3}$, es decir, siempre se despegue de la pared vertical antes que del suelo.

Soluc P3

Se toman ejes solidarios al sólido x', y', z' que coinciden con los ejes principales con los que se calculó la matriz de inercia. La velocidad angular es

$$\vec{\Omega} = \Omega_0 (\cos \alpha \hat{x}' + \sin \alpha \hat{y}')$$

donde α es ángulo que forma el lado mayor de la placa con el eje de rotación. Por la geometría, resulta ser que

$$\cos \alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2} \quad \sin \alpha = b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

luego

$$\vec{\Omega} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} (ax' + by')$$

El momento angular es luego

$$\vec{L} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} (I_{xx}ax' + I_{yy}by') \quad (1)$$

$$= \frac{M\Omega_0}{3\sqrt{a^2 + b^2}} (ab^2x' + ba^2y') \quad (2)$$

La derivada del momento angular es (usando movimiento relativo)

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (3)$$

$$= \frac{Mab(a^2 - b^2)\Omega_0^2}{3(a^2 + b^2)} \hat{z} \quad (4)$$

de manera que si $a \neq b$ \vec{L} no es constante.

Como el centro de masas no se mueve, entonces las fuerzas sobre los extremos se deben cancelar mutuamente, luego $F_I = -F_D$. Además, $\hat{n} = (-bx' + ay')/\sqrt{a^2 + b^2}$. Luego, el torque total que ejercen sobre el centro de masa es

$$\vec{\tau} = 2F_D \sqrt{a^2 + b^2} \hat{z}$$

Igualando el torque a la derivada del momento angular se encuentra

$$F_D = \frac{Mab(a^2 - b^2)\Omega_0^2}{6(a^2 + b^2)^{3/2}}$$