

Soluciones:

[P1] Se usan coordenadas cartesianas con origen en la base de la polea. Si l es el largo de la cuerda entre Q y la masa, entonces la posición de la partícula es

$$\vec{r} = \sqrt{l^2 - h^2} \hat{x}$$

El largo l satisface

$$\dot{l} = -V_0 \quad (1)$$

$$\ddot{l} = 0 \quad (2)$$

Luego, la posición y velocidad de la partícula es

$$\vec{v} = \frac{-lV_0}{\sqrt{l^2 - h^2}} \hat{x} \quad (3)$$

$$\vec{a} = \frac{-l^2 V_0^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}} + \frac{V_0^2}{\sqrt{l^2 - h^2}} \hat{x} \quad (4)$$

$$= -\frac{h^2 V_0^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}} \hat{x} \quad (5)$$

Despejando $l = \sqrt{x^2 + h^2}$ es posible escribir la velocidad y aceleración en términos de x

$$\vec{v} = \frac{-\sqrt{x^2 + h^2} V_0}{x} \hat{x} \quad (6)$$

$$\vec{a} = -\frac{h^2 V_0^2}{x^3} \hat{x} \quad (7)$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la tensión \vec{T} , la gravedad y la normal. Proyectando se obtiene

$$\vec{F} = N\hat{y} - mg\hat{y} + T \left(-\frac{x}{l}\hat{x} + \frac{h}{l}\hat{y} \right)$$

Igualando fuerzas con aceleraciones se tiene

$$\hat{x}: \quad -m \frac{h^2 V_0^2}{x^3} = -T \frac{x}{l} \quad (8)$$

$$\hat{y}: \quad 0 = N - mg + T \frac{h}{l} \quad (9)$$

De la primera ecuación se despeja

$$T = \frac{mh^2 l V_0^2}{x^4}$$

Reemplazando en la ecuación para \hat{y} se tiene

$$N = mg - \frac{mh^3 V_0^2}{x^4}$$

La condición de despegue se obtiene imponiendo que la normal se anule. Luego,

$$x^* = \left(\frac{h^3 V_0^2}{g} \right)^{1/4} \quad (10)$$

Reemplazando en la expresión para la tensión se obtiene

$$T = mg \frac{l^*}{h} \quad (11)$$

con $l^* = \sqrt{x^{*2} + h^2}$.

Otra solución:

Dato:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{x^2 + h^2} = -v_0$$

de donde

$$v = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} v_0, \quad a = -\frac{h^2 v_0^2}{x^3}$$

La ecuación de movimiento entonces es

$$-m \frac{h^2 v_0^2}{x^3} = T \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} T$$

lo que da T . Pero la normal tiene que ser $N = mg - T \sin \alpha = mg - \frac{mv_0^2 h^3}{x^4}$. La exigencia que se anule da

$$x^* = \left(\frac{v_0^2 h^3}{g} \right)^{1/4}$$

Etc

[P2] La fuerza total sobre la masa es la suma de su peso y de la normal. En coordenadas esféricas $\vec{N} = -N\hat{r}$ y la aceleración de gravedad, de acuerdo a la figura, es

$$\vec{g} = g(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$$

Se aprecia que la fuerza total no tiene componente a lo largo de $\hat{\phi}$, lo que quiere decir que la componente a_ϕ de la aceleración debe ser nula, esto es,

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0$$

que implica que

$$\dot{\phi} = \frac{V_0 \sin \theta_0}{R \sin^2 \theta} \quad (A)$$

donde se impuso la condición inicial $\dot{\phi}(0) = V_0/(R \sin \theta_0)$.

Las ecuaciones de movimiento que quedan son

$$\begin{aligned} -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) &= mg \cos \theta - N \\ mR(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

Si en la segunda se reemplaza $\dot{\phi}$ por lo ya dicho en (A) se puede despejar $\ddot{\theta}$ como función de θ ,

$$\ddot{\theta} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{R^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{g}{R} \sin \theta$$

Con el truco de siempre de multiplicar por $\dot{\theta}$ se tiene derivadas exactas a ambos lados y, usando las condiciones iniciales, $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ se obtiene

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_0} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)$$

Se pone $\theta_0 = \pi/4$ y se impone que $\dot{\theta} = 0$ para $\theta = 2\pi/3$, luego

$$0 = \frac{2g}{R} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{V_0^2}{2R^2} \left(2 - \frac{4}{3} \right)$$

de donde se despeja

$$V_0^2 = (1 + \sqrt{2})3gR$$

La normal en ese punto se obtiene de la segunda ecuación de movimiento y todo lo anterior dando

$$N = mg \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{2} \right)$$

Que es positiva de manera que la partícula no se depega del cascarón.

[P3] Primero se describe el movimiento del sistema. Para eso, se usa la ecuación de momento angular. En coordenadas polares, definiendo el ángulo ϕ medido desde la vertical de arriba se tiene

$$\vec{L} = m d \hat{p} \times d\dot{\phi} \hat{\phi} + m 2d \hat{p} \times 2d\dot{\phi} \hat{\phi} \quad (12)$$

$$= 5md^2 \dot{\phi} \hat{k} \quad (13)$$

El torque de las fuerzas en la rótula se anulan y sólo quedan las de la gravedad. Recordando que $\vec{g} = -g \cos \phi \hat{\phi} + g \sin \phi \hat{p}$ se tiene

$$\vec{\tau} = d\hat{p} \times mg(-\cos \phi \hat{p} + \sin \phi \hat{\phi}) \quad (14)$$

$$+ 2d\hat{p} \times mg(-\cos \phi \hat{p} + \sin \phi \hat{\phi}) \quad (15)$$

$$= 3dm g \sin \phi \hat{k} \quad (16)$$

De manera que se obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} = \frac{3g}{5d} \sin \phi$$

cuya solución, usando la condición inicial $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 0$ es

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{6g}{5d}(1 - \cos \phi)}$$

Por otro lado, para calcular la fuerza que hace la bisagra, usamos la ecuación de fuerzas. El momentum del centro de masa es

$$\vec{P} = 3md\dot{\phi} \hat{\phi}$$

de manera que su derivada es

$$\dot{\vec{P}} = 3md\ddot{\phi} \hat{\phi} - 3md\dot{\phi}^2 \hat{p}$$

reemplazando los valores encontrados se tiene

$$\dot{\vec{P}} = \frac{9mg}{5} \sin \phi \hat{\phi} - \frac{18mg}{5} (1 - \cos \phi) \hat{p}$$

Las fuerzas externas son la fuerza de la rótula \vec{R} y los pesos

$$\vec{F}^{ext} = \vec{R} + mg(-\cos \phi \hat{p} + \sin \phi \hat{\phi})$$

Igualando $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext}$, se tiene

$$\vec{R} = mg(\cos \phi \hat{p} - \sin \phi \hat{\phi}) + \frac{9mg}{5} \sin \phi \hat{\phi} - \frac{18mg}{5} (1 - \cos \phi) \hat{p}$$

Evaluando en $\phi = \pi/2$

$$\vec{R} = mg \left(\frac{4}{5} mg \hat{\phi} - \frac{18}{5} \hat{p} \right)$$

es decir, apunta hacia adentro y abajo.