Resp Ej8

Los parámetros de la órbita original de S_1 son $(e = 0, R = R_0)$ y, puesto que es órbita circunferencial

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{GMR_0}}{R_0}$$

El momento angular $\ell_1 = GMm_1^2 R_0$ y la energía de S_1 es

$$E_1 = -\frac{(GM)^2\, m_1^3}{2\ell^2} = -\frac{GMm_1}{2R_0}$$

Se sabe que

$$\frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}} = \frac{1-e}{1+e}$$

lo que implica que la excentricidad de S_3 es

$$e_3 = \frac{1}{2}$$

Puesto que el meteorito llega radialmente, su momento angular es nulo, lo que asegura que $\ell_1 = \ell_3$. Además la conservación de momentum lineal asegura que

$$(m_1 + m_2)\,\vec{v}_3 = m_1 R_0 \dot{\phi}\hat{\phi} - m_2 v_2 \hat{\rho}$$

Usando que $m_2 = m_1/3$ se obtiene la rapidez

$$v_3 = \sqrt{\frac{9GM + R_0 v_2^2}{16R_0}}$$

Con v_3 se puede ontener E_3 calculando la energía total justo después del impacto como suma de la energía cinética (se usa v_3 y la suma de las masas) y la energía potencial $GM(m_1 + m_2)/R_0$, lo que da

$$E_3 = \frac{m_1\,(R_0 v_2^2 - 23GM)}{24R_0}$$

Con esta expresión para E_3, y puesto que se conoce el valor del momento angular, se obtiene el valor (del cuadrado) de la excentricidad,

$$e_3^2 = \frac{49GM + 9R_0 v_2^2}{256GM}$$

que se sabe que vale $\frac{1}{4}$, lo que permite despejar que

$$v_2^2 = \frac{5GM}{3R_0}$$

De aquí se recalcula v_3:

$$v_3^2 = \frac{2GM}{3R_0}$$

De v_2 se obtiene que la energía del meteorito en el momento anterior al impacto es

$$E_2 = -\frac{GM\,m_1}{18R_0} \qquad \Rightarrow E_{\text{ini}} = -\frac{5GM\,m_1}{9R_0}$$

y

$$E_3 = -\frac{28GMm_1}{27R_0}$$

El cambio de energía finalmente resulta ser

$$\Delta = \frac{13GM\,m_1}{27R_0}$$

.