Resp Ej6

La variable dinámica natural es el ángulo ϕ que la barra forma con la vertical. Las partículas tienen rapidez $D\dot{\phi}$ y $2D\dot{\phi}$ respectivamente, y sus energías potenciales, tomando $\phi = 0$ como el cero de energía potencial, es $mgD(1 - \cos\phi) + mg2D(1 - \cos\phi)$, de modo que

$$E = \frac{5mD^2}{2}\dot{\phi}^2 + 3mgD\,(1 - \cos\phi)$$

donde la energía potencial es

$$U = 3mgD\,(1 - \cos\phi)$$

Esta función tiene su mínimo en $\phi = 0$, por lo que éste es el punto de equilibrio estable.
La ecuación de movimiento se obtiene de exigir que dE/dt y ella se puede reducir a la forma

$$\ddot{\phi} = -\frac{3g}{5D}\,\sin\phi$$

que se reconoce como la ecuación de un péndulo simple, salvo por factores numéricos algo diferentes. La frecuencia angular ω de pequeñas oscilaciones es, según lo visto en clases, $\sqrt{U''/\alpha}$ donde α se obtiene de identificar $\frac{\alpha}{2} = \frac{5mD^2}{2}$. De aquí que

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{5D}}$$

* * *

En el caso del péndulo de N masas la energía cinética es

$$K = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(j\,D\,\dot{\phi}\right)^2 = \frac{m\,D^2\,\dot{\phi}^2}{2}\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

mientras que la energía potencial es

$$\begin{aligned} U &= mgD(1-\cos\phi)\sum_{j=1}^{N} j \\ &= \frac{mgN(N+1)}{2}\,(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

Esta vez el coeficiente de la energía cinética da

$$\alpha = \frac{mD^2N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

y el cálculo de U'' es trivial, lo que implica finalmente que

$$\omega = \sqrt{\frac{U''}{\alpha}} = \sqrt{\frac{3g}{(2N+1)\,D}}$$

El caso $N = 1$ recupera el resultado de un péndulo simple y con $N = 2$ se recupera el resultado del péndulo de dos masas resuelto en la primera parte.

Cualquier energía potencial que difiera por una constante de las dadas en esta solución son igualmente correctas.