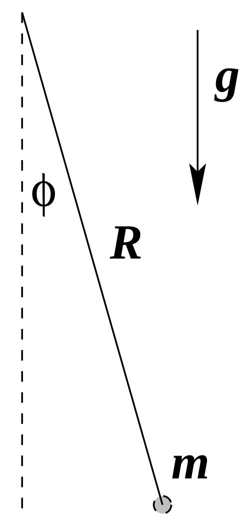
MECÁNICA
Ejercicio N^o 3
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero
1 abril 04
Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

A pesar de que las preguntas están concatenadas, se considerarán correctas solo las respuestas que estén totalmente correctas. No anule una respuesta por un signo errado.

Se tiene un péndulo plano formado por un hilo de largo R en cuyo extremo libre hay una partícula de masa m. Éste comienza a moverse en $t = 0$ desde la posición de reposo estable (posición vertical) con velocidad angular ω_0. La evolución de este péndulo puede ser bastante diferente según el valor de ω_0: (A) puede alcanzar un ángulo máximo para devolverse por donde vino; (B) puede llegar hasta la cúspide ($\phi = \pi$) aun con el hilo tenso, y seguir dando vueltas sin parar. (C) También hay un caso en que el hilo se destensa y la partícula deja de moverse en un arco de circunferencia y cae parabólicamente en un vuelo libre. Se trata de saber bajo qué condiciones ocurre qué caso. Datos son m, g, R y ω_0.



[p1 1pt] Suponga que se da el comportamiento tipo (A). Obtenga una expresión para el ángulo máximo ϕ_{max} y

[p2 1pt] vea qué condición debe cumplirse para que cuando se alcanza ϕ_{max} la tensión sea positiva. Si no fuera positiva no se da movimiento tipo (A). Indique cual es el ϕ_{max} extremo para movimiento tipo (A).

[p3 2pt] Obtenga una condición sobre ω_0 para que ocurra el movimiento circunferencial que más arriba se llamó tipo (B).

[p4 2pt] Si el movimiento es del tipo (C) obtenga el ángulo para el cual la partícula inicia un movimiento parabólico. Indique claramente las disigualdades que debe satisfacer ω_0^2 para que se dé este tipo de movimiento.

Resp Ej3

Las ecuaciones para el péndulo son

$$\begin{aligned} -mR\dot{\phi}^2 &= mg\cos\phi - T \\ mR\ddot{\phi} &= -mg\sin\phi \end{aligned}$$

Es fácil integrar una vez la segunda ecuación. Se obtiene

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{R}\left(\cos\phi - 1\right) \qquad (o1)$$

Si se reemplaza ($o1$) en la primera ecuación de movimiento se obtiene una expresión para la tensión,

$$T = m\omega_0^2 R + mg\left(3\cos\phi - 2\right) \qquad (t0)$$

Movimiento tipo A: Por definición el ángulo máximo corresponde al momento en que $\dot{\phi} = 0$. En tal caso la ecuación anterior implica

$$\cos\phi_{\mathsf{max}} = 1 - \frac{R\omega_0^2}{2g}$$

Para que el movimiento sea tipo (A) la tensión en con este ángulo máximo debe ser positiva, es decir

$$T(\phi = \phi_{\mathsf{max}}) = m\left(g - \frac{\omega_0^2 R}{g}\right) \geq 0$$

lo que exige que

$$\omega_0^2 \leq \frac{2g}{R} \qquad (c1)$$

Movimiento tipo B: Para que el péndulo llegue a la cúspide con tensión positiva se requiere $T > 0$ para todo ϕ, es decir,

$$\omega_0^2 > \frac{(2 - 3\cos\phi)\,g}{R} \qquad \text{para todo } \phi$$

El caso más desfavorable ocurre con coseno $= -1$, es decir, la exigencia para el caso (B) es

$$\omega_0^2 \geq \frac{5g}{R} \qquad (c2)$$

Movimiento tipo C: el hilo se destensa y la partícula comienza a caer parabólicamente. La condición de tensión nula, de ($t0$) es $\omega_0^2 R = g(3\cos\phi - 2)$, es decir,

$$\cos\phi = \frac{2}{3} - \frac{\omega_0^2 R}{3g}$$

En el límite $\omega_0^2 = 5g/R$ se obtiene $\cos\phi = -1$, que corresponde a que la tensión se hace nula justo al alcanzar la cúspide. El límite $\omega_0^2 = 2g/R$ da $\cos\phi = 0$ que implica $\phi = \frac{\pi}{2}$. El movimiento (B) se da si

$$\frac{2g}{R} < \omega_0^2 < \frac{5g}{R}$$

Resumen: El ángulo máximo (movimiento A) no puede sobrepasar $\frac{\pi}{2}$. Si el péndulo sobrepasa tal ángulo pero partió con velocidad angular menor que $5g/R$ perderá tensión y caerá parabólicamente. Si ($c2$) se cumple, la partícula hace movimiento de circunferencia completa.