Resp Ej2

Conviene plantear el problema en coordenadas esféricas. Se usa los vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$. Los dos primeros están indicados en la figura. La fuerza se compone por el peso y la normal. La normal se expresa en forma general ortogonal a la vara:

$$\vec{N} = N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}$$

Un vector unitario vertical hacia arriba, que llamamos $\hat{k}$ es:

$$\hat{k} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$$

por lo que el peso es

$$m\vec{g} = -mg\left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right).$$

La ecuación de movimiento vectorial en este caso debe hacer uso que θ es una constante y $\dot{\phi} = \omega$ es constante.

$$m\left[(\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta)\hat{r} - r\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta} + \frac{\omega\sin\theta(2r\dot{r})}{r\sin\theta}\hat{\phi}\right] = m\vec{g} + \vec{N}$$

que se simplifica un poco

$$m\left[(\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta)\hat{r} - r\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta} + 2\omega\dot{r}\hat{\phi}\right] = m\vec{g} + \vec{N}$$

Esta ecuación es separable en tres ecuaciones escalares según los tres vectores unitarios. De ellas la única que no contiene un coeficiente desconocido (las comopentes de $\vec{N}$) es la ecuación asociada a $\hat{r}$. Ella es

$$\ddot{r} = r\omega^2\sin^2\theta - g\cos\theta \qquad (1)$$

Si se acepta que $r = A\,\cosh\beta t + B$, se comprueba que $\dot{r}(0) = 0$ y, puesto que $A\cosh\beta t = r - B$ es fácil obtener que $\ddot{r} = \beta^2\,(r - B) = \beta^2\,r - \beta^2 B$. Comparándo esta expresión con (1) se obtiene que

$$\beta = \omega\sin\theta\,, \qquad B = \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

y puesto que $r(0) = r_0$ se obtiene que

$$A = r_0 - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

con lo cual la solución ha quedado totalmente especificada.

La partícula cae al vértice o escapa según el signo de $\dot{r}$, es decir, según el signo de A. Para que no caiga debe cumplirse que $A > 0$, es decir,

$$r_0 > \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

Si (1) se multiplica por $\dot{r}$ se obtiene derivadas exactas a ambos lados, lo que permite integrar una vez. Se hace esta integración y se usa las condiciones iniciales lo que arroja

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{2}(r^2 - r_0^2)\,\omega^2\,\sin^2\theta - g(r - r_0)\cos\theta$$

Es directo ver que ella es válida en $t = 0$.

Las otras ecuaciones dan directamente

$$N_\theta = -m\sin\theta\left(g + r\omega^2\right)\,, \quad N_\phi = 2\omega\dot{r}\sin\theta$$

donde se debe reemplazar r y sus derivadas por sus valores precisos para que la respuesta cuente.