

## Parte 8: Controladores en el Dominio de la Frecuencia

Prof. Doris Sáez H.

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Análisis de Frecuencia

Caso general

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

real      imaginario

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

$$\phi(j\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad [d_B]$$

Ganancia logarítmica

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

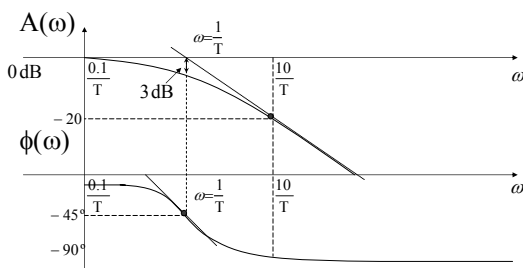
Ejemplo:

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + (j\omega T)^2} \right| = -10 \log(1 + (\omega T)^2)$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Definiciones:

En los diagramas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas.

- Una octava es una banda de frecuencia de  $\omega_1$  a  $2\omega_1$ , en donde  $\omega_1$  es cualquier frecuencia
- Una década es una banda de frecuencia de  $\omega_1$  a  $10\omega_1$ , en donde,  $\omega_1$  es cualquier frecuencia.

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

### Construcción de Diagrama de Bode

Factores básicos de  $G(j\omega)$

Ganancias K.

1. Factores de integral y de derivada  $(j\omega)^{\pm 1}$
2. Factores de primer orden  $(1 + j\omega)^{\pm 1}$
3. Factores cuadráticos  $\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

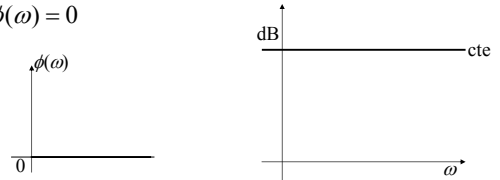
D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

1. Ganancia K  $G(j\omega) = K$

$$A(\omega) = 20 \log K [dB]$$

$$\phi(\omega) = 0$$



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

2. Factores de integral y de derivada  $(j\omega)^{\pm 1}$   
(polos y ceros en el origen).

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

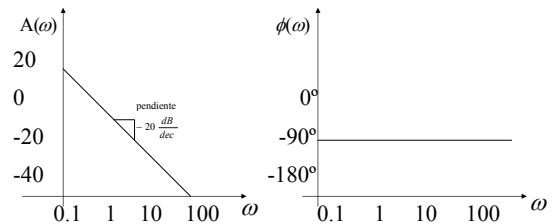
$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log(\omega) [dB] \quad \text{pendiente} = -20 \frac{dB}{dec}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Polo en el origen



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Polos en origen múltiples:  $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| = -20N \log(\omega) [dB]$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ N$$

$$\text{pendiente} = -20N \frac{dB}{dec}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Cero en origen  $G(j\omega) = j\omega$

$$A(\omega) = 20 \log |j\omega| = 20 \log(\omega) [dB]$$

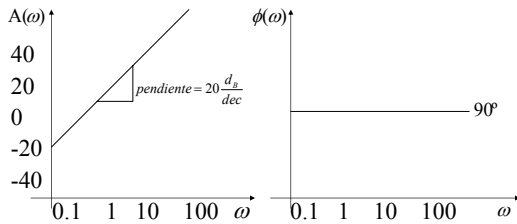
$$\phi(\omega) = 90^\circ$$

$$\text{pendiente} = 20 \frac{dB}{dec}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Cero en el origen



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Ceros en origen múltiples  $G(j\omega) = (j\omega)^N$

$$A(\omega) = 20 \log |(j\omega)^N| = 20N \log(\omega) [dB]$$

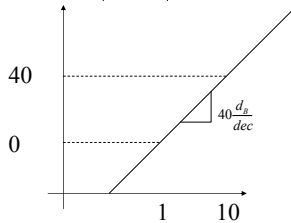
$$\phi(\omega) = 90N$$

$$pendiente = 20N \frac{dB}{dec}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

$$Ej: 20 \log |(j\omega)^2| = 40 \log(\omega)$$



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

3. Factores de primer orden  $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$   
(Polos o ceros en eje real)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log(\sqrt{1 + \omega^2 T^2})$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

- Polo en el eje real

$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(1) = 0 [dB] \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(\omega T) [dB] \Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Angulo de fase exacto del factor  $\frac{1}{1 + j\omega T}$  es:

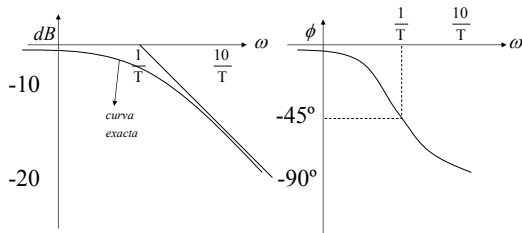
$$\phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$$\text{si } \omega = \frac{1}{T} \quad \phi = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$\text{y } A(\omega) = -20 \log(\sqrt{2}) = -3 [dB]$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Cero en eje real:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$A(\omega) = +20 \log|1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

si

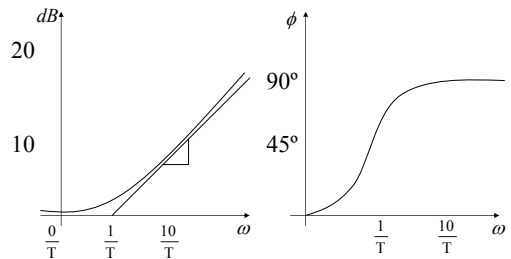
$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = +20 \log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = 20 \log(\omega T) \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = +20 \log(\sqrt{2}) \cong 3 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 45^\circ$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Factores cuadráticos  $\left[ 1 + 2\xi \frac{\omega j}{\omega_n} + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$

(polos o ceros complejos conjugados).

Se define  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi u j + (ju)^2} = \frac{1}{1 - u^2 + 2\xi u j}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

$\omega = \omega_n$  frecuencia corte

$$A(\omega) = -20 \log \sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2} = -10 \log((1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{2\xi u}{1 - u^2} \right)$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Si  $u \ll 1 \rightarrow A(\omega) = -10 \log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) \approx 0^\circ$   
 $(\omega \ll \omega_n)$

$u \gg 1 \rightarrow A(\omega) = -10 \log(u^4) = -40 \log(u) \Rightarrow \phi(\omega) \approx -180^\circ$   
 $(\omega \gg \omega_n)$

$u = 1 \rightarrow A(\omega) = -10 \log(4\xi^2)$  punto de resonancia  
 $(\omega = \omega_n)$

$\Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ$   
 $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$   
 $\omega \ll \omega_n$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

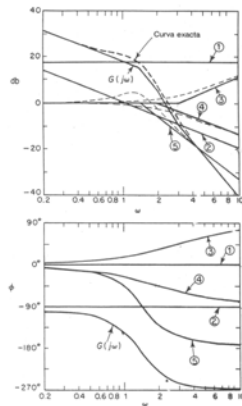
Ejemplo:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega + 2)((j\omega)^2 + j\omega + 2)}$$

Normalizando:

$$G(j\omega) = \frac{7.5 \left( \frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{j\omega \left( \frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left( \frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Transformación Bilineal:

$$Z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}$$

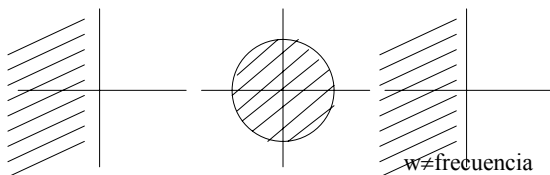
D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Plano s

Plano z

Plano w



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Con  $G(w) \rightarrow G(j\omega)$  con  $w = j\omega$   
 $\omega$ : frecuencia

El diagrama de Bode de  $G(j\omega)$  se realiza con el mismo procedimiento que para sistemas continuos.

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode

Ejemplo:

$$G(z) = \frac{2(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.8187z + 0.8187}$$

$$T = 0.2$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

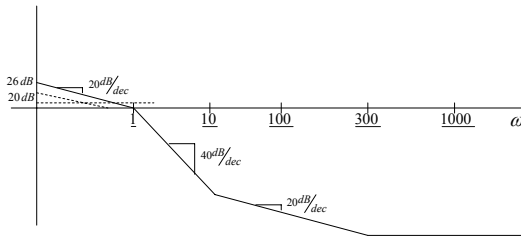
$$\rightarrow G(w) = \frac{2 \left( 1 + \frac{w}{300} \right) \left( 1 - \frac{w}{10} \right)}{w(w+1)}$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{2 \left( 1 + \frac{j\omega}{300} \right) \left( 1 - \frac{j\omega}{10} \right)}{j\omega(j\omega+1)}$$

D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

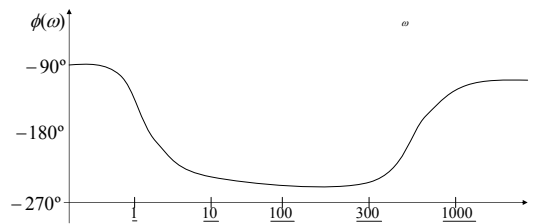
• Ejemplo



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile

## Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Ejemplo



D.Saez. Arch21. EL42D Control de Sistemas. U. Chile