Resumen:
Estabilidad de Sistemas
según Lyapunov

Prof. Doris Sáez H

Primer Método de Lyapunov

Sea el sistema descrito por:

$$\dot{x} = f(x,t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

Primer Método de Lyapunov

Por expasión de Taylor, puede escribirse como:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_\varepsilon} \tilde{x}(t)$$

donde

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_\varepsilon$$

Primer Método de Lyapunov

Llamando,

$$J(x_\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J(x_\varepsilon)\tilde{x}(t)$$

Primer Método de Lyapunov

El primer Teorema de Lyapunov dice lo siguiente:

a. Si el sistema linealizado es asintóticamente estable entonces el sistema no lineal es asintóticamente estable.
b. Si el sistema linealizado es inestable entonces el sistema no lineal es inestable.
c. Si el sistema linealizado es estable entonces no se tiene información del sistema no lineal.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 1: Si existe una función escalar real V(x) continua y con primeras derivadas parciales continuas, tal que en N(0) se cumple para todo t ≥ t0:

i. V es definida positiva (V > 0)
ii. $\dot{V}$ es semidefinida negativa ($\dot{V} \leq 0$)

entonces la solución x(t) = 0 de la ecuación es $\dot{x} = f(x)$ estable según Lyapunov.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 2: Si existe una función escalar real V(x) continua y con primeras derivadas parciales continuas, tal que en N(0) se cumple para todo t ≥ t0:

i. V es definida positiva (V > 0)

ii. $\dot{V}$ es semidefinida negativa ($\dot{V}$ < 0)

entonces la solución x(t) = 0 de la ecuación es $\dot{x} = f(x)$ asintóticamente estable según Lyapunov.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 3: Si existe una función escalar real V(x) continua y con primeras derivadas parciales continuas, tal que en N(0) se cumple para todo t ≥ t0:

i. V es definida positiva (V > 0)

ii. $\dot{V}$ es semidefinida negativa ($\dot{V}$ < 0)

iii. V ➔Inf cuando ||x||➔Inf

entonces la solución x(t) = 0 de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ es globalmente asintóticamente estable según Lyapunov.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 4: Sea el sistema Continuo descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

entonces, x(t) = 0 es AESL si y sólo si dada Q matriz positiva definida, existe P también positiva definida, tal que:

$$A^T P + PA = -Q$$

Segundo Método de Lyapunov

TEO 5: Sea el sistema Discreto descrito por x(t+1) = Ax(t), entonces x = 0 es AESL si y sólo si dada una matriz Q positiva definida, existe P también positiva definida tal que:

$$A^T PA - P = -Q$$

Segundo Método de Lyapunov

- TEO 6: Sea el sistema descrito por x(t+1)=f(x(t)) con xe=0. El origen es AESL si y sólo si existe una función V(x) positiva definida tal que:

  ΔV(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))

  es negativa definida.