

Auxiliar

AS30A-02

Profesores: Mónica Rubio y Paulina Lira

Auxiliares: Matías Radiszcz y Denise Riquelme

23-Junio-2004

P1 Demuestre que a partir de una expansión homogénea e isotrópica se deduce la Ley de Hubble, esto es, que la velocidad de recesión de las galaxias en el Universo es proporcional a la distancia a la que se encuentran (i.e. $V \propto d$, donde actualmente se tiene $V = H_o \times d$).

Si a_o es la distancia entre dos puntos "Hoy", dado el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía, es decir en el universo un punto con respecto a cualquier otro se aleja de igual forma sin importar la dirección donde se encuentre (isotropía, no hay dependencia angular) ni la posición en particular donde este (homogeneidad), luego:

La distancia entre dos puntos en un tiempo t luego del Big-Bang

$$a(t) = a_o \times R(t)$$

Donde $R(t)$ es el llamado factor de escala. Obviamente en el Big-bang $t=0$, $R(0)=0$ y "Hoy" $t=t_o$, $R(t_o)=1$.

Para $t=t_1$, $a_1 = a(t_1) = a_o \times R_1$ con $R_1 = R(t_1)$

Para $t=t_2$, $a_2 = a(t_2) = a_o \times R_2$ con $R_2 = R(t_2)$

$$V = \frac{\Delta a}{\Delta t} = a_o \times \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

$$V = \frac{a(t)}{R(t)} \times \frac{dR}{dt}$$

$$\text{Entonces } V = a(t) \times \frac{dR/dt}{R(t)} = a(t) \times H(t)$$

$$\text{De esta manera } H(t) = \frac{(dR/dt)}{R(t)}$$

$$\text{Y } H_o = H(t_o) = \frac{\dot{R}(t_o)}{R(t_o)} = \frac{dR(t_o)}{dt}.$$

P2 Una galaxia se encuentra a una distancia de 200 Mpc. determine la longitud de onda observada de la línea del hidrógeno ($\lambda_e = 6563 \text{ \AA}$) si se mueve con una velocidad *peculiar* $V_p = 1000 \text{ km/s}$ con un ángulo θ respecto a la línea de la visual, considere la expansión del Universo.

$$\vec{V}_{galaxia} = \vec{V}_{expansión} + \vec{V}_{peculiar}$$

Por la Ley de Hubble

$$\vec{V}_{expansión} = H_o \times d \hat{r} \text{ con } H_o = 65 \text{ km/s Mpc}^{-1}$$

$$\text{Luego: } \vec{V}_{expansión} = 65 \times 200 \hat{r} = 13000 \text{ km/s } \hat{r}$$

Por otro lado: $\vec{V}_{peculiar} \cdot \hat{r} = V_p \cos(\theta) = 1000 \times \cos(\theta)$

Con \hat{r} vector unitario en la dirección radial respecto al observador.

Por efecto doppler si $v \ll c$: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\vec{V} \cdot \hat{r}}{c} = z$ ($c=300000$ km/s)

Entonces: $z = \frac{13000+1000 \times \cos(\theta)}{300000} = 0.0433 + 0.0033 \times \cos(\theta)$

$\lambda_{observado} = (z + 1)\lambda_e$

$\lambda_{observado} = (1.0433 + 0.0033 \times \cos(\theta))6563 \text{ \AA}$

$\lambda_{observado} = (6847.4 + 21.9 \times \cos(\theta)) \text{ \AA}$

Si $\theta = 0$ grados, entonces $\lambda_{observado} = 6869.3 \text{ \AA}$

Si $\theta = 90$ grados, entonces $\lambda_{observado} = 6847.4 \text{ \AA}$, redshift solo debido a expansión del Universo

Si $\theta = 180$ grados, entonces $\lambda_{observado} = 6825.5 \text{ \AA}$

P3 Si dos rayos son emitidos en forma paralela desde un lugar, que ocurre con el camino seguido por los rayos (que ocurre con un rayo respecto al otro) para: a) Un Universo Abierto, b) Un Universo Cerrado y c) Un Universo Plano.

La interpretación de la gravedad ejercida por cuerpos con masa a partir de la relatividad general de Einstein, da cuenta que la materia (también la energía) deforman el espacio tiempo (lo curvan). Es decir la interpretación de como afecta la gravedad a los cuerpos es geométrica, es decir los cuerpos se ven afectados no por una fuerza (como la de Newton) sino que por la geometría del espacio-tiempo, seguirán un camino según esta geometría. Un rayo de luz también seguirá un camino por el espacio-tiempo de acuerdo con esta geometría.

A partir de modelos cosmológicos del Universo, donde se aplica la relatividad general, se tienen distintas soluciones para un universo isotrópico y homogéneo, cuya condición inicial es el Big-Bang, que impulsa al universo a expandirse. Debido a la gravedad ejercida por la materia el universo se desaceleraría (o sea el factor de Hubble cambia con el tiempo, $H(t)$ no es cte), si se toma solo en cuenta este efecto de la materia y el Big-Bang, dependiendo la energía inicial del Big-Bang y la masa (densidad de materia) en el universo, se obtienen principalmente tres soluciones.

La primera cuando la densidad de materia supera un punto crítico (densidad crítica), la gravedad le gana a la expansión del Universo y por tanto el universo se desacelerará hasta comenzar a contraerse, a este universo se le llama Cerrado, debido a que su tamaño no tiende al infinito, o sea su factor de escala $R(t)$ tiene un máximo, para este caso la geometría del universo es esférica, es decir dos rayos de luz paralelos tenderán a aproximarse uno del otro (caso c) hasta toparse, como los meridianos en una esfera).

Otra solución es cuando la densidad de materia del universo es menor a la densidad crítica ($\rho_{crítico}$), en tal caso la gravedad no le gana a la expansión del universo, y el universo se continuará expandiendo por siempre con su valor del factor de Hubble $H(t)$ tendiendo a

una constante cuando t va a infinito. En $R(t)$ v/s t , esto se ve una curva creciente pero que tiende asintoticamente a una linea recta. En este caso la geometria del espacio-tiempo es hiperbolica, y a este universo se le llama Abierto, ya que siempre continuara expandiendose desacelerandamente pero tendiendo a una tasa cte. Para este universo dos rayos de luz inicialmente paralelos tenderan a seguir su geometria de manera que estos tenderan a separarse uno del otro mas y mas.

Y finalmente en el caso en que la densidad de materia es exactamente la densidad crítica (Con $\Omega_o = 1$), entonces la expansión es justo contrarrestada con la gravedad y el universo se ira desacelerando mas y mas pero siempre seguira expandiendose tendiendo asintoticamente a un tamaño fijo (tiende a un factor de escala $R(t_{infinito})$ es cte). Es decir su tasa de expansión tiende siempre a cero pero nunca lo alcanza(el factor de Hubble $H(t)$ tiende a cero cuando t va a infinito). La geometria de este Universo es plana, por esto es que se le llama Universo Plano. dos rayos de luz paralelos en este Universo siempre continuarán paralelos, el uno con el otro.

Luego para cada caso, a) Los rayos se separaran uno respecto al otro por siempre, b) Los rayos se aproximarán hasta cruzar sus trayectorias(como los meridianos en una esfera que se cruzan en los polos) y c) Los rayos de acuerdo a la geometria plana seguiran siempre paralelos.

No esta demas mencionar que un universo sin materia, luego del Big-Bang siempre continuará expandiendose a la misma tasa, es decir nunca se desacelerará. El espacio-tiempo seguirá su camino de expansión a tasa cte ya que no tiene gravedad que desacelere su expansión.

P4 Cual es el rol de energía oscura en el universo, y que evidencia observacional hay para su existencia.

Cuando Einstein llego a sus ecuaciones de relatividad general, se dio cuenta que aplicadas al universo, este no podría mas que colapsar debido a su propia gravedad. Existia el prejuicio(cientifico) en esa epoca el cual era que el Universo era estático y que existió por siempre, Einstein entonces compartiendo los prejuicios de la epoca, tubo que meter dentro de sus ecuaciones un termino que ejerciera una suerte de presión que contrarestará a la gravedad de tal manera que el universo quedara estático, este término es su famosa constante cosmológica(de la cual despues el se arrepintió). Con esta cte elegida en forma consistente sus soluciones le podían dar un universo estático(que no se expandia ni se contraia), pero a la vez sus soluciones no eran estables. Una pequeña perturbacion hacia que el universo colapsara o que se expandiera por siempre.

Luego ya se sabe la historia del descubrimiento de Hubble, de que el universo se expande, que desecho la visión de un universo estático y que existio por siempre. Es de este modo que tomaron fuerza los modelos cosmologicos antes mencionados en la pregunta P3. Segun estos modelos el universo estaría siempre en desaceleración. Es decir que el parametro o factor de Hubble $H(t)$, que Hubble midio constantete para el universo local solo hasta unos cientos de miles de años atras(redshift cosmológico no muy grande), en un tiempo pasado aun mayor seria mayor, en virtud que el universo se a ido desacelerando. Osea los astrónomos esperaban ver que galaxias muy lejanas tubieran una velocidad que variarian con la distancia a una

tasa mayor que la cte Hubble lo que mostraria que la pendiente del factor de escala con el tiempo seria cada vez menor mientras nos acercamos a la actualidad.

Sin embargo observaciones de Supenovas tipo Ia han permitido medir distancias a galaxias con redshift cosmológicos muy grandes. Y el resultado sorprendente es que en el pasado reciente el universo se expandia con una tasa menor. Es decir el universo se estaría acelerando. Opuesto a todo lo que se esperaba.

Como se explica esto. Bueno, para explicar esto los astrónomos han hechado mano a la constante cosmológica antes desechada, pero ahora util en otro contexto, para explicar la evolucion acelerada del universo. Esta cte cosmologica seria una suerte de energia aun desconocida, que los astrónomos le han denominado Energía Oscura, que ejercería una presión que contraresta la gravedad y mas aun le gana de manera que hace que el Universo se expanda cada vez mas rápido.

Una forma de lograr esto es que la densidad de esta energía oscura se mantenga cte a medida que el universo evoluciona(que se expande), a diferencia de la densidad de materia que cae como $1/R^3$ y la densidad de radiacion que cae como $1/R^4$. Es decir en algun momento esta energia oscura empieza a dominar sobre la gravedad de la materia, y el universo comienza a acelerarse. Dado las evidencias de las mediciones de distancias a galaxias muy distantes, valga la redundancia, por medio de SN Ia nosotros estariamos en tiempo posterior al dominio de la materia y la radiacion sobre la energia oscura. En conclusión hoy en dia la energia oscura dominaria sobre la densidad de materia y haria que el universo se expanda aceleradamente(el factor de escala $R(t)$ aumenta exponencialmente con el tiempo).