iii) $(2,8)$ $\quad |x+8| = x+8$

$$|2x-|x+8|| = |2x-x-8| = |x-8| = 8-x$$

$$x-2>0 \Longrightarrow x^2-10x+24 \geq 0$$

$$\longrightarrow S_{iii} = [4,6] \cap (2,8) = [4,6]$$

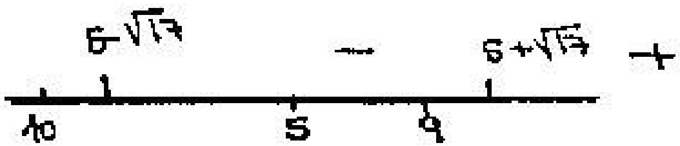
iv) $(8,\infty)$ $\quad |x+8| = x+8$

$$|2x-|x+8|| = |x-8| = x-8$$

$$x-2>0$$

$$\longrightarrow (x-8)(x-2) \leq 8 \Longrightarrow x^2-10x+16 \leq 8$$

$$x^2-10x+8 \leq 0 \qquad x = \frac{10 \pm \sqrt{100-32}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}$$



$$\longrightarrow S_{iv} = (8,\infty) \cap [5-\sqrt{17}\,,\,5+\sqrt{17}] = (8\,,\,5+\sqrt{17}]$$

Si $x=-8 \longrightarrow |-16-0| = 16 \leq \dfrac{8}{-10} \Rightarrow$ Falso.

Si $x=8 \longrightarrow 0 \leq \dfrac{8}{4} = 2$ verdadero.

$$\Longrightarrow S_T = (-8,2) \cup [4,6] \cup (8\,,\,5+\sqrt{17}] \cup \{8\}$$

$$= (-8,2) \cup [4,6] \cup [8\,,\,5+\sqrt{17}]$$

$\rightarrow$ Punto $x = -\frac{8}{3} \notin (-\infty, -8)$

• para el Módulo grande X

Si $x \geq 8 \Rightarrow 2x - (x+8) = 0 \rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \rightarrow \in x > -8$ R

Si $x = -8 \rightarrow -16 = 0 \rightarrow$ no sirve. VA

$\rightarrow$ Puntos críticos $2, -8$ y 8

i) $(-\infty, -8)$

$$|x+8| = -x-8$$
$$|2x - |x+8|| = |2x + x + 8| = -8 - 3x$$
$$x - 2 < 0$$

$$\rightarrow -8 - 3x \leq \frac{8}{x-2} \Rightarrow (-8-3x)(x-2) \geqslant 8$$
$$(-8x + 16 - 3x^2 + 6x) \geqslant 8$$

$$\Rightarrow -3x^2 - 2x + 8 \geqslant 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -2 & & 4/3 & \end{array} \Rightarrow S_i = (-\infty, -8) \cap [-2, 4/3] = \emptyset$$

ii) $(-8, 2)$

$$|x+8| = x+8$$
$$|2x - x - 8| = |x - 8| = 8 - x$$

$$\Rightarrow 8 - x \leq \frac{8}{x-2} \Rightarrow (8-x)(x-2) \geqslant 8$$
$$8x - 16 - x^2 + 2x \geqslant 8$$
$$-x^2 + 10x - 24 \geqslant 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 10x + 24 \leq 0$$

$$\rightarrow x = 10 \pm \sqrt{100 - 96} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & 4 & & 6 & \end{array} \Rightarrow S_{ii} = (-8, 2) \cap ((-\infty, 4] \cup [6, \infty))$$
$$S_{ii} = (-8, 2)$$

P3 Resolver

$$2x + |x-5| \le \frac{25}{x-5}$$

Caso 1) $x-5 > 0 \Rightarrow 2x + x - 5 \le \frac{25}{x-5} \iff 3x - 5 \le \frac{25}{x-5}$ (puedo pasar multiplicando por $x-5>0$)

$\iff (3x-5)(x-5) \le 25$

$\iff 3x\left(x - \frac{20}{3}\right) \le 0$

	x	$(x-\frac{20}{3})$	R
$-\infty$	$-$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$
$\frac{20}{3}$	$+$	$+$	$+$

$\boxed{S_1 : (-\infty, 0) \cup \left(\frac{20}{3}, +\infty\right)}$

Caso 2) $x-5 < 0 \Rightarrow 2x + (-(x-5)) \le \frac{25}{x-5} \iff x+5 \le \frac{25}{x-5}$ $/ \cdot (x-5)^2 > 0$

$(x+5)(x-5)^2 \le 25(x-5)$

$(x-5)(x-\sqrt{50})(x+\sqrt{50}) \le 0$

	$(x-5)$	$(x-\sqrt{50})$	$(x+\sqrt{50})$	R
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-\sqrt{50}$	$-$	$-$	$+$	$+$
5	$+$	$-$	$+$	$-$
$\sqrt{50}$	$+$	$+$	$+$	$+$
∞				

$S_2 : \{(-\infty, -5\sqrt{2}] \cup [5, 5\sqrt{2}]\} \cap]-\infty, -5]$

$=]-\infty, -5\sqrt{2}]$

$\boxed{S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -5\sqrt{2}] \cup [5, \frac{20}{3}]}$

) $\left|2x - |x+8|\right| \le \frac{8}{x-2}$ **Problema EXTRA**

Puntos críticos $x = 2$ y $x = -8$

el módulo grande $2x - |x+8| = 0$.

$x \le 8 \Rightarrow 2x - (-x-8) = 0 \Rightarrow 2x + x + 8 = 0 \Rightarrow 3x + 8 = 0$

$x = \frac{-8}{3}$

P7 | (a) Resolvamos $\dfrac{3-|x+2|}{(x+1)(x-2)} \leq 0 \iff \dfrac{3-|x+2|}{(x+1)(x-2)} \cdot (x+1)^2 (x-2)^2 \leq 0$

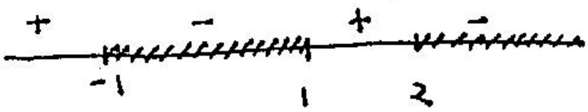
$$(3-|x+2|) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \leq 0$$

Tenemos dos casos

Caso 1: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$\Rightarrow (3-x-2)(x+1)(x-2) \leq 0$

$f(x) = (1-x)(x+1)(x-2) \leq 0$ Ptos críticos $x=1$; $x=-1$; $x=2$



$x<-1 \Rightarrow f(x) > 0$

$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) < 0$

$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$

$x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$

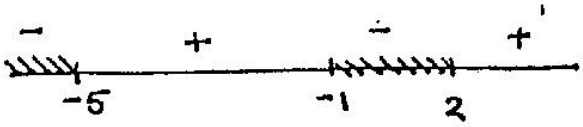
$\Rightarrow S_1 = ([-1,1] \cup [2,\infty[) \cap [-2,\infty[$

$\Rightarrow S_1 = [-1,1] \cup [2,\infty[$

Caso 2: $x+2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$

$\Rightarrow (3+x+2)(x+1)(x-2) \leq 0$

$f(x)$ $(x+5)(x+1)(x-2) \leq 0$ Ptos críticos $x=-5$; $x=-1$; $x=2$



$x \leq -5 \Rightarrow f(x) \leq 0$

$-5 < x < -1 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq 0$

$x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$S_2 = (]-\infty,-5] \cup [-1,2]) \cap]-\infty,-2]$

$S_2 =]-\infty,-5]$

$\therefore S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow \boxed{S =]-\infty,-5] \cup [-1,1] \cup [2,\infty[}$

Desigualdades: Calcular el rango posible de valores de x. $a > b$

$a^2 > b^2$ ✓

P6 $a > 0$

$$\frac{|x-a| - |x+a|}{(x^2 - a^2)} > 0$$

Caso 1: Para que el término sea positivo el denominador y el numerador deben tener el mismo signo. Luego analicemos el 1er caso posible.

- $|x-a| - |x+a| > 0 \quad \wedge \quad x^2 - a^2 > 0$
- $|x-a| > |x+a| \quad \wedge \quad x^2 > a^2$

Importante: en caso que se tenga desigualdad de módulos, es más sencillo elevar al cuadrado para encontrar la solución:

$$|(x-a)|^2 > |x+a|^2$$

$$x^2 - 2ax + \cancel{a^2} > \cancel{x^2} + 2ax + \cancel{a^2}$$

/ $x \neq 0$, porque obviamente $|a| > |a|$ es mentira y $a \neq 0$ por enunciado, luego no hay problemas en cancelarlos

$$-2ax > 2ax$$

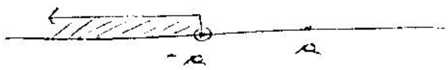
$$-x > x$$

$$\Rightarrow \quad x < 0$$

Además x debe cumplir $x^2 > a^2$ lo que implica $|x| > |a|$, como

$$\underset{>0}{x < 0} \quad \Rightarrow \quad -x > \underset{a>0}{a} \quad \Rightarrow \quad x < -a$$

luego: $x \in (-\infty, a)$



Caso 2: $\cdot \; |x-a| - |x+a| < 0 \quad \wedge \quad x^2 - a^2 < 0$

$|x-a| < |x+a| \quad \wedge \quad |x| < |a|$

análogamente, como en el caso 1

$$-2ax < 2ax$$

$$-x < x$$

$$\Rightarrow \quad x > 0$$

y como $|x| < |a| \Rightarrow x < |a| \Rightarrow x < a$

luego $x \in (0, a)$

$\Rightarrow$ conjunto soluciones $\boxed{(-\infty, -a) \cup (0, a)}$

(1)

INECUACIONES

P4) Propiedades
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \quad (x \geq -a \wedge x \leq a)$
- $|x| \geq a \iff x \geq a \vee x \leq -a$

Resuelva $\dfrac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1$

SOL) factorizamos $\dfrac{\cancel{|x-1|}\,|x-1|}{\cancel{|x-1|}\,|x-2|} \leq 1$ altiro sabemos que $x \neq 1 \wedge x \neq 2$

↓
SIMPLIFICAMOS

$|x-1| \leq |x-2| \quad (\;)^2$

$x^2-2x+1 \leq x^2-4x+4$

$2x \leq 3 \qquad \boxed{x \leq \frac{3}{2}}$

SOL) : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2},\ x \neq 1\} = (-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{$

P5) Resolver $3|x+5|-10 < 2|x-2|$ ⊛

SOL) EN este tipo de problemas en que NO HAY FACTORES, resolvemos CASO POR CASO

1er caso) $x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad x-2 > 0$

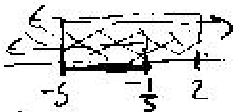
OJO: si algo ≥ 0 $|algo| = algo$
algo < 0 $|algo| = -algo$

⊛ queda $3(x+5)-10 < 2(x-2)$

$\boxed{x < -9}$; $S_1 : (-\infty, -9) \cap \{x \mid x \geq -5 \wedge x > 2\} = \boxed{\emptyset}$

2º caso) $x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad x-2 < 0$

$3(x+5)-10 < 2(-(x-2))$



$\boxed{x < -\frac{1}{5}}$ $\quad S_2 : \{x \mid x < -\frac{1}{5}\} \cap \{x / x \geq -5 \wedge x < 2\} = \boxed{[-5, -\frac{1}{5})}$

3er caso) $x+5 < 0 \wedge x-2 \geq 0 \quad (x < -5 \wedge x \geq 2) \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \quad S_3 : \boxed{\emptyset}$

4º caso) $x+5 < 0 \quad \wedge \quad x-2 < 0$ $\quad S_4 :$ $(-29, +\infty) \cap (-\infty, -5) \cap (-\infty, 2)$

$3(-(x+5))-10 < 2(-(x-2))$

$\boxed{-29 < x}$

$S_4 : (-29, -5)$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = (-29, -5) \cup [-5, -\frac{1}{5})$

//

P2] Probar que:

Si $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ menores o iguales que $M \in \mathbb{R}^+$

y se cumple que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

Entonces $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz \leq 3M$

DEM] $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz \geq Mx^2+My^2+Mz^2+2Mxy+2Mx\ldots$
$+2M\ldots$

$\leq M(x^2+y^2+z^2+\underline{2xy}+\underline{2xz}+\underline{2yz}) \leq M(x^2+y^2+z^2+(\underline{x^2+y^2})+(\underline{x^2+z^2})+(\underline{y^2+z\ldots}$

(pues $2xy \leq x^2+y^2$ ... etc)

$\leq M3(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\leq 1}) \leq 3M$ ■

P3] Demostrar que $\forall\, a, b, x, y \in \mathbb{R}$

$$|ax+by| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$

Dem] Para Demostrarlo PREVIAMENTE desglosaremos lo que debemos demostrar

BORRADOR Elevando al cuadrado:

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a^2x^2}+2axby+\cancel{b^2y^2} &\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)=\cancel{a^2x^2}+b^2x^2+a^2y^2+\cancel{b^2y^2} \\ 2axby &\leq b^2x^2+a^2y^2 \end{aligned}\right] (*)$$

$$0 \leq (b^2x^2-2axby+a^2y^2) \quad \left(\text{si } \begin{matrix} z=ay \\ t=bx \end{matrix}\right)$$

$$0 \leq (t-z)^2$$ (ESTO SABEMOS QUE ES VERDAD)

Ahora

DEM] Sabemos que $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. "Tomemos" $x=(bx-ay)$ $\therefore (bx-ay)^2 \geq 0$

Nos devolvemos...

$$b^2x^2-2axby+a^2y^2 \geq 0$$

$$b^2x^2+a^2y^2 \geq 2axby \quad / + a^2x^2+b^2y^2 \text{ (al revés de } (*))$$

$$a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2axby+b^2y^2$$

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq |ax+by|$$ ■

CLASE AUXILIAR

N°2

CRISTIAN ALDAY

P1 PROBAR QUE $\dfrac{(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \forall (a,b,c) \geq 0$

DEM,

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$a^2+c^2 \geq 2ac$$
$$b^2+c^2 \geq 2bc$$

$+$

(pues $(a-b)^2 \geq 0$) ($\forall x \in \mathbb{R} \; x^2 \geq 0$)

$a^2-2ab+b^2 \geq 0 \iff \boxed{a^2+b^2 \geq 2ab}$

DESIGUALDAD IMPORTANTE

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2(ab+ac+bc) \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$

(1) $\quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

Por otro lado $\quad (a+b+c)^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)$

pero $\quad (a+b+c)(\underline{a^2+b^2+c^2}+2ab+2bc+2ac) \underset{(1)}{\geq} (a+b+c)(ab+ac+bc+2ab+2bc+2ac)$

$$= (a+b+c)(3ab+3ac+3bc)$$
$$= 3a^2b+3abc+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3abc+3abc+3bc^2+3ac^2$$
$$= 9abc+3b(a^2+c^2)+3a(b^2+c^2)+3c(a^2+b^2)$$
$$\geq 9abc+3b(2ac)+3a(2bc)+3c(2ab)$$
$$= 27abc$$

$$\therefore \quad \frac{(a+b+c)^3}{27} \geq abc \quad /\, (\;)^{1/3}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \blacksquare$$