CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #19

Problema 19.1. Suponga que la suma parcial k-esima de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ tiene valor $5 - \frac{k}{3^k}$. Encuentre el valor de a_i. Responde si la serie es convergente o no.

Solución 19.1. La suma parcial de la serie se define como $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, luego, se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i &= 5 - \frac{k}{3^k} \\
\sum_{i=1}^{k+1} a_i &= 5 - \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
a_{k+1} &= s_{k+1} - s_k \\
&= 5 - \frac{k+1}{3^{k+1}} - 5 + \frac{k}{3^k} \\
&= \frac{2k-1}{k3^{k+1}}
\end{aligned}$$

Veamos si la serie converge:

Acotemos superiormente los terminos de la serie. Sabemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}}$ tiene valor $\lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{N+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, y como la serie se puede descomponer de la forma:

$$\begin{aligned}
\sum \frac{2k-1}{k3^{k+1}} &= \sum [\frac{2}{3^{k+1}} - \frac{1}{k3^{k+1}}] \\
&\leq \sum \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} \\
&\leq 2\sum \frac{1}{3^{k+1}} + \sum \frac{1}{3^{k+1}} \\
&\leq 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de la serie debe ser finito, lo que implica que converge.

Problema 19.2. Muestre la convergencia o no convergencia de las siguientes series.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3+2^{-n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n}}{4^{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2ne^{-n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}n!}{n^{n}}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}n!}{n^{n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}\ln n}$

Solución 19.2.

1. Utilizemos el teorema $\sum a_n < +\infty \Rightarrow a_n \to 0$. Veamos si la sucesion asociada converge a 0. Es mas, veamos que la sucesion ni siquiera converge. Tomemos la subsucesion a_{2n} y a_{2n+1}:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{3+2^{-2n}} &= \frac{-2}{3} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+2^{-(2n+1)}} &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto no converge y la serie no es convergente.

2. Acotemos superiormente la serie. $2^{n-1} < 3^{n-1}$, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2^{n-1}+3^{n}}{4^{n}} < \sum_{n=1}^{N} \frac{3^{n-1}+3^{n}}{4^{n}} < \sum_{n=1}^{N} \frac{3^{n}+3^{n}}{4^{n}} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{3^{n}}{4^{n}} = 2\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^{n} = 2\left(\frac{\frac{3}{4}-(\frac{3}{4})^{N+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) \to 6$, por lo tanto, la serie es convergente.

3. Utilizemos el criterio del cuociente.

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{2(n+1)}{e^{n+1}}\frac{e^{n}}{2n} \\
&= \lim \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es convergente (el limite es menor que 1).

4. Criterio del cuociente:
$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} \\
&= \lim 2\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}$$
Como $\frac{2}{e} < 1$, la serie es convergente.

5. Realizando el procedimiento anterior, se obtiene que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$, por lo tanto la serie diverge.

6. Criterio de Mayoracion o comparacion. Como $\frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$ y como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la serie converge.

Problema 19.3. ¿La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ es convergente?

Solución 19.3. Criterio del cuociente:
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+2n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{2n+4-3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \underbrace{\left(\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^2}_{\to e^{-2}} \underbrace{\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-3}}_{\to 1} \\
&= \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \\
&= \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2} \\
&= \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{-2n}}_{\to 1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie converge ($e^{-1} < 1$).