CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #3

Teorema 3.1 (Teorema del valor medio (TVN) con $g(x) = x$ (ver apunte)). Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Problema 3.1. Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio. Encuentre los valores de a, b, c, d que satisfacen las siguientes condiciones:

- La curva pasa por el punto $(0, 0)$.
- La recta tangente en el origen a la curva forma un angulo de 60º con la parte positiva del eje OX.
- En $x = 1$ y $x = -1$ las rectas tangentes son paralelas al eje OX.

Solución 3.1.

- Si la curva pasa por $(0, 0)$, queire decir que $f(0) = 0$, por lo tanto $d = 0$.
- Si el angulo formado es 60º, quiere decir que la pendiente de la recta tangente es $\sqrt{3}$, por lo tanto $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ evaluada en $x = 0$ es igual a $f'(0) = \sqrt{3} = c$.
- Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, evaluando en $1, -1$ se tiene que $f'(1) = 3a + 2b + \sqrt{3}$ y $f'(-1) = 3a - 2b + \sqrt{3}$. Resolvindo este sistema se obtiene $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $b = 0$.

Problema 3.2. Con un trozo de material rectangular , se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a y b.

Solución 3.2. La representacion grafica es la siguiente: El volumen de la caja es:

$$\begin{aligned} V(x) &= (a - 2x)(b - 2x)x \\ &= 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx \end{aligned}$$

Su primera derivada es:

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab$$

La soluciones de la ecuacion $V'(x) = 0$ son $x_{+,-} = \dfrac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$ con $x_+ \geq 0, x_- \geq 0$. Al evaluar esas soluciones en $V(x)$ se tiene que $V(x_+) \leq V(x_-)$, por lo tanto x_+ es un minimo y x_- un maximo, y las dimensiones optimas son largo $a - 2x_-$, ancho $b - 2x_-$ y alto x_-.

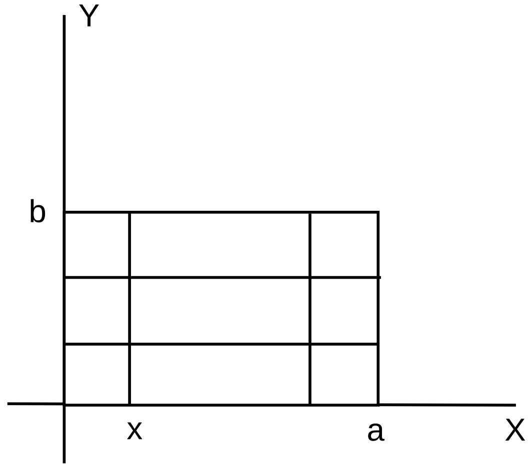

Figura 1: Representacion grafica.

Problema 3.3. 1. Pruebe que si f es una funcion continua y derivable en un intervalo I (abierto) de modo que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I.

2. Pruebe que si dos funciones tienen derivadas iguales entonces difieren en una constante.

Solución 3.3. 1. Sean $x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in I$ tal que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$, pero como $f'(c) = 0$, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$, con lo que f es constante en I.

2. Si f y g son funciones con derivadas iguales, considerando $h(x) = f(x) - g(x)$ se tiene que $h'(x) = 0$ y por la parte anterior, h es constante en cualquier intervalo I abierto, es decir, $f(x) = g(x) + C$ en cualquier intervalo abierto, con $C \in \mathbb{R}$.

Problema 3.4. Sea f continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ y f' es creciente en $(0, \infty)$ con $f(0) = 0$. Utilize el teorema del valor medio para probar que $f'(x) \geq \dfrac{f(x)}{x}, \forall x \in (0, \infty)$. Concluya que f es creciente en $(0, \infty)$.

Solución 3.4. Para $x \in (0, \infty)$, se cumplen la hipotesis del TVN en $[0, x]$, luego, $\exists c \in (0, x)$ tal que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$, pero como $f(0) = 0$, se tiene que $\dfrac{f(x)}{x} = f'(c)$. Como $c < x$ se tiene que $f'(c) \leq f'(x)$, pues f' es creciente en $(0, \infty)$, por lo tanto $f'(x) \geq f'(c) = \dfrac{f(x)}{x}$ para todo $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{x}\right)' &= \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \\
&= \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x}
\end{aligned}
$$

Como $f'(x) - \frac{f(x)}{x} \geq 0$ y $x > 0$ se tiene que $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' \geq 0$, con lo cual $\frac{f(x)}{x}$ es creciente. Si $x \leq y$ entonces $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y}$, es decir, $f(x) \leq f(y) \underbrace{\frac{x}{y}}_{\leq 1} \leq f(y)$, con lo cual f es creciente en $(0, \infty)$.

Problema 3.5. Calcule los siguientes limites:

1. $\lim_{x\to 0} cotanx - \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución 3.5. 1.

$$\begin{aligned} cotanx - \frac{1}{x} &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0} x\cos x - \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} x = 0$ se tiene una expresion de la forma "$\frac{0}{0}$", aplicando la regla de L'Hopital, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} cotanx - \frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{1 + \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x} = \\ & 0 \end{aligned}$$

2. Como $\lim_{x\to 0} \frac{a^x + b^x}{2} = 1$ y $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, se tiene una expresion de la forma "1^∞", sin embargo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\ln\left[\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left[\frac{a^x + b^x}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

y como $\lim_{x\to 0} \ln\left[\frac{a^x + b^x}{2}\right] = 0$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$, se tiene una expresion de la forma "$\frac{0}{0}$", aplicando la regla de L'Hopital a $\frac{1}{x}\ln\left[\frac{a^x + b^x}{2}\right]$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left[\frac{a^x + b^x}{2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2}{a^x + b^x} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} \\
&= \frac{\ln a + \ln b}{2} \\
&= \ln \sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

Como exp es una funcion continua, $\lim_{x\to 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} f(x))$, luego,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln \sqrt{ab}) = \sqrt{ab}.$$