

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #23

Problema 23.1. Demostrar que la serie de potencias de $f(x) = \log(1-x)$ converge solamente para $x \in [-1, 1)$ y que la serie de potencias de $g(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ converge solamente para $x \in (-1, 1)$

Solución 23.1. La serie de potencias en torno a 0 de $\log(1-x)$ es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log(1-x))^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
Calculemos sus derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1-x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1-x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{-2}{(1-x)^3} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

Con esto, la serie resulta:

$$0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(k-1)!}{k!} x^k$$

Calculemos el radio de convergencia:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1}} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Veamos los extremos:

Caso $x = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$$

Es la serie armonica, luego no converge.

Caso $x = -1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k}$$

Por el criterio de Leibniz, converge. Como $f(x)$ no esta definida en 1, es convergente en $[-1, 1)$.

Para la funcion $g(x)$ es analogo:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \\ g''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ g'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} - \frac{-2}{(1-x)^3} \\ &\dots \\ g^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} - \frac{(-1)^n(n-1)!}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

Luego, la serie de potencias en torno a 0 es:

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n} \right) x^n$$

Su radio de convergencia es $\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{2(-1)^{n+2}}{n+1} \right|}{\left| \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \right|}} = 1$. Revisemos los extremos:

Caso $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

Por Leibniz, la serie es convergente.

Caso $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n} \right) (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{2n+1}}{n} \right)$$

es la serie armonica, luego, no converge. Como $g(x)$ no esta definida en 1 ni en -1, es convergente en $(-1, 1)$.

Problema 23.2. La sucesion de Fibonacci es de la forma: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$:

1. Demostrar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$.
2. Sea $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$. Demuestre que $\psi(x)$ converge si $|x| < \frac{1}{2}$.
3. Demostrar que si $|x| < \frac{1}{2}$, entonces $\psi(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$.
4. Utilize descomposicion en fracciones parciales de la funcion anterior y $\frac{1}{x-a}$ para obtener otra serie de potencias para $\psi(x)$.

$$5. \text{ Demostrar } a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Solución 23.2. 1.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} \\ &= 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ &= 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_{n-2}} \\ &\leq 1 + 1 \end{aligned}$$

2. Veamos que valores de x hacen que el limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}|x^n|}{a_n|x^{n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}|x|}{a_n}$ sea menor que 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x|$$

Por lo tanto, si $|x| < \frac{1}{2}$, el limite (si existe) sera menor que 1, con lo que la serie sera convergente.

3. Equivale a probar que

$$\psi(x) - x\psi(x) - x^2\psi(x) = 1$$

Veamos cada termino:

$$\begin{aligned} x\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ x^2\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\psi(x) - x\psi(x) - x^2\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} \\
&= 1 + x - x + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{(a_n - a_{n-1} - a_{n-2})}_{=0} x^{n-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. Las soluciones de $x^2 + x - 1 = 0$ son $\phi_+ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\phi_- = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 + x - 1} &= \frac{A}{x - \phi_+} + \frac{B}{x - \phi_-} \\
&= \frac{Ax - A\phi_- + Bx - B\phi_+}{x^2 + x - 1}
\end{aligned}$$

Esto implica que $A + B = 0$ y $-A\phi_- - B\phi_+ = 1$ con lo que $A = \frac{1}{\phi_+ - \phi_-}$, $B = \frac{1}{\phi_- - \phi_+}$. Sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$, como $|\frac{x}{\phi_+}| < \frac{\frac{1}{2}}{|\phi_+|} = \frac{1}{|-1+\sqrt{5}|} < 1$ y $|\frac{x}{\phi_-}| < \frac{\frac{1}{2}}{|\phi_-|} = \frac{1}{|-1-\sqrt{5}|} < 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{-\phi_+}{\phi_+ - \phi_-} \frac{1}{1 - \frac{x}{\phi_+}} &= \frac{-\phi_+}{\phi_+ - \phi_-} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\phi_+} \right)^k \\
\frac{-\phi_-}{\phi_- - \phi_+} \frac{1}{1 - \frac{x}{\phi_-}} &= \frac{-\phi_-}{\phi_- - \phi_+} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\phi_-} \right)^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\psi(x) = \frac{\phi_+}{\phi_- - \phi_+} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\phi_+} \right)^k + \frac{\phi_-}{\phi_+ - \phi_-} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\phi_-} \right)^k$$

5. De la igualdad anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\phi_- - \phi_+)\phi_+^k} + \frac{1}{(\phi_+ - \phi_-)\phi_-^k} \right] x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{-\sqrt{5}\phi_+^k} + \frac{1}{\sqrt{5}\phi_-^k} \right] x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{5}\phi_-^k - \sqrt{5}\phi_+^k}{5} (-1)^k \right] x^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} x^{k-1}$$

Por lo tanto, $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Problema 23.3. Estudie la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones en el espacio

de las funciones acotadas de \mathbb{R} en \mathbb{R} $f_k(x) = \frac{1}{1+(x-k)^2}$ y $f_k(x) = \begin{cases} k^2x & x \in [0, \frac{1}{k}] \\ -k^2x + 2k & x \in [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}] \\ 0 & x \notin [0, \frac{2}{k}] \end{cases}$

Solución 23.3. :

1. Convergencia Puntual:

Para la primera sucesion, se tiene que, fijo el x :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$$

Por lo tanto, la sucesion converge puntualmente a la funcion nula.

Para la segunda sucesion, cuando $k \rightarrow \infty$, se debe considerar cada intervalo posible, es decir, la interseccion para todo $k \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} [0, \frac{2}{k}] = \{0\}$. Con esto, la funcion se reduce a k^2x cuando $x \in \{0\}$ y 0 cuando no, por lo tanto, para cada x fijo, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$. El limite puntual es la funcion nula.

2. Convergencia Uniforme:

Para la primera sucesion. Como en la parte anterior vimos que converge puntualmente a la funcion nula y la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, el limite uniforme debe ser la funcion nula :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesion no converge uniformemente.

Para la segunda sucesion. Al igual que para la primera sucesion, suponemos que converge uniformemente a la funcion nula.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \\ &= \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesion no converge uniformemente.

Problema 23.4 (Números de Catalan). Los números de Catalan son de la forma $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ y aparecen en diversos ambitos de la matemática:

- En número de maneras de ordenar n pares de paréntesis correctamente abiertos y cerrados, por ejemplo

$$\begin{array}{c} () \\ (()) \\ ()()((()())()) \end{array}$$

- El número de formas en que un polígono de $n + 2$ lados puede ser particionado en n triángulos.
- El número de árboles binarios con exactamente $n + 1$ hojas.

Demuestre el siguiente teorema:

Teorema 1. Sea (a_n) la sucesión definida por la recurrencia $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ y $a_0 = 1$. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| \leq \frac{1}{4}$ y su valor es igual a la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} & 0 < |x| \leq \frac{1}{4} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

En particular, $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$ (este es el n -esimo numero de Catalan).

INDICACION: Suponga que $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(n)}(x) \neq \pm\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y la serie de Taylor de $\sqrt{1-4x}$ en torno a $x = 0$ es $1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$, con $\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(2n-2-n+1)!}$. Utilize la fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

Solución 23.4. La función g se puede expandir en serie de Taylor en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \setminus \{0\}$, pues $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ es de clase \mathcal{C}^∞ en ese conjunto. Las derivadas de g son:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-4x}x} - \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x^2} \\ g''(x) &= \frac{2}{(1-4x)^{3/2}x} - \frac{2}{\sqrt{1-4x}x^2} + \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x^3} \\ g'''(x) &= \frac{12}{(1-4x)^{5/2}x} - \frac{6}{(1-4x)^{3/2}x^2} + \frac{6}{\sqrt{1-4x}x^3} - 3 \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x^4} \\ g^{(4)}(x) &= \frac{120}{(1-4x)^{7/2}x} - \frac{48}{(1-4x)^{5/2}x^2} + \frac{24}{(1-4x)^{3/2}x^3} - \frac{24}{\sqrt{1-4x}x^4} + 12 \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x^5} \end{aligned}$$

Suponiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(n)}(x) \neq \pm\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie de Taylor se puede evaluar en torno a $x = 0$. El primer termino de la serie de Taylor en torno a $x = 0$ es $g(0) = 1$. Sean (b_n) los coeficientes de la serie de Taylor asociada a g , con lo anterior, $b_0 = 1$. Se tiene la igualdad $g^2(x) = \frac{g(x)-1}{x}$:

$$\begin{aligned}
 g^2(x) &= \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right) \\
 &= \frac{1 - 2\sqrt{1-4x} + 1 - 4x}{4x^2} \\
 &= \frac{1 - \sqrt{1-4x} - 2x}{2x^2} \\
 &= \frac{\frac{1 - \sqrt{1-4x} - 2x}{2x}}{x} \\
 &= \frac{\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} - 1}{x} \\
 &= \frac{g(x) - 1}{x}
 \end{aligned}$$

La multiplicacion de series convergentes es de la forma:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 g(x)g(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k b_i x^i b_{k-i} x^{k-i} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k b_i b_{k-i} \right) x^k \\
 &= \frac{g(x) - 1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \frac{1}{x} \\
 &= \underbrace{\frac{b_0}{x}}_{=\frac{1}{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} - \frac{1}{x} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^n$$

Por lo tanto $b_{n+1} = \sum_{i=0}^n b_i b_{n-i}$. Como la sucesion (b_n) tiene la misma recurrencia que la sucesion (a_n) y sus valores iniciales son iguales, las sucesiones son iguales, luego, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ toma los valores de la funcion $g(x)$ para $0 < |x| < \frac{1}{4}$. El valor de la serie para $x = 0$ es $b_0 = 1$. Falta ver si la serie converge en $x = \frac{1}{4}$.

De la indicacion, sabemos que el desarrollo de Taylor en torno a cero de $\sqrt{1-4x}$ es $1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$, por lo tanto, el desarrollo de Taylor en torno a cero de $g(x)$ es:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 - \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n\right)}{2x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \end{aligned}$$

Utilizando la aproximacion de Stirling¹, vemos que:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi}(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \\ &= \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}e^{-2n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}4^n n^{2n+\frac{1}{2}-n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{3}{2}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-1}} \\ &\sim \frac{4^n n^{n-n-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}ee^{-1}} \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}4^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, al evaluar la serie en $x = \frac{1}{4}$, se obtiene $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$, la cual converge pues $\frac{3}{2} > 1$. Por lo tanto, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $0 \leq |x| \leq \frac{1}{4}$ y toma los valores de la funcion $g(x)$.

¹El simbolo \sim equivale a decir que son iguales en el infinito.