

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #17

Resumen 1 (Cálculo de áreas). Si se tiene la region $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ (en caso de que f sea positiva) o $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq -f(x)\}$ (en caso de que f sea negativa), el area de R esta dada por:

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Resumen 2 (Sólidos de Revolucion). Para una region $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, segun el eje con respecto al cual se le haga rotar, se tienen los siguientes volúmenes de los solidos generados:

- Con respecto al eje OX:

$$V(R) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

- Con respecto al eje OY:

$$V(R) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Problema 17.1. Hallar el volumen del solido S que se obtiene al hacer girar el circulo $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ (S_1) y el area delimitada por las curvas $y = -2, y = 2, x = 0, x = 1$ (S_2) alrededor del eje vertical.

Solución 17.1. El solido final sera la suma de los volúmenes de los solidos generados por separado, pues $V = S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, por lo tanto:

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

Calculemos S_1 :

El solido resultante sera un toro de radio "superior" 2 y radio "inferior" 1. En este caso, tambien se puede hacer una descomposicion del solido, ya que tendra una parte donde la funcion que lo define es negativa y otra donde es positiva, y son de interseccion vacia:

$$V(S_1) = V(S_1^+) + V(S_1^-)$$

Como el corte se hace de manera simetrica, se tendra que $V(S_1^+) = V(S_1^-)$. Calculemos $V(S_1^+)$:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + f^2(x) &= 1 \\ f(x) &= \sqrt{1 - (x-2)^2} \\ V(S_1^+) &= 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 - (x-2)^2} dx\end{aligned}$$

Cambio de variable: $x - 2 = \cos t \Rightarrow dx = -\operatorname{sen} t dt$:

$$\begin{aligned}V(S_1^+) &= 2\pi \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} -(\cos t + 2) \operatorname{sen}^2 t dt \\ &= -2\pi \left[\underbrace{\int_{\arccos -1}^{\arccos 1} \cos t \operatorname{sen}^2 t dt}_I + \underbrace{\int_{\arccos -1}^{\arccos 1} 2 \operatorname{sen}^2 t dt}_J \right]\end{aligned}$$

Resolvamos I :

$$\begin{aligned}I &= \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} \underbrace{\cos t}_{dv} \underbrace{\operatorname{sen}^2 t}_{u} dt \\ v = \operatorname{sen} t & \quad du = 2 \operatorname{sen} t \cos t dt \\ I &= \operatorname{sen}^3 t \Big|_{\arccos -1}^{\arccos 1} - \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} 2 \operatorname{sen}^2 t \cos t dt \\ I &= \operatorname{sen}^3(\arccos 1) - \operatorname{sen}^3(\arccos -1) - 2I \\ I &= \frac{1}{3}(\operatorname{sen}^3(\arccos 1) - \operatorname{sen}^3(\arccos -1)) \\ I &= \frac{1}{3}(\operatorname{sen}^3(\pi) - \operatorname{sen}^3(0)) \\ I &= \frac{1}{3}(0 - 0) \\ I &= 0\end{aligned}$$

Resolvamos J :

$$J = \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} \operatorname{sen}^2 t dt$$

Recordando que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, tenemos que:

$$J = \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} \frac{dt}{2} - \int_{\arccos -1}^{\arccos 1} \frac{\cos 2t}{2} dt \\
&= \frac{1}{2} \left[(\arccos 1 - \arccos -1) - \frac{1}{4} (\sin(2 \arccos 1) - \sin(2 \arccos -1)) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(0 - \pi) - \frac{1}{4} (\sin 0 - \sin 2\pi) \right] \\
&= \frac{-\pi}{2}
\end{aligned}$$

Con esto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
V(S_1^+) &= -2\pi \frac{-\pi}{2} \\
&= \pi^2
\end{aligned}$$

Concluimos que el volumen del solido S_1 es:

$$V(S_1) = 2\pi^2$$

Calculemos S_2 :

El solido que se forma es un cilindro con base de area π y altura 4, por lo tanto de volumen 4π . Verifiquemos:

Al igual que en el caso anterior, podemos dividir el solido por la mitad y calcular el volumen de la parte positiva. La funcion a integrar es la funcion constante en el intervalo $[0, 1]$ de valor 2.

$$\begin{aligned}
V(S_2^+) &= 2\pi \int_0^1 x 2 dx \\
&= 4\pi \int_0^1 x dx \\
&= 4\pi \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) \\
&= 4\pi \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Por lo tanto $V(S_2) = 4\pi$ y $V(S) = 4\pi + 2\pi^2$

Problema 17.2. Resuelva la integral de la funcion de la figura (1):

Solución 17.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tendra que la integral:

$$A_n = \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x) dx$$

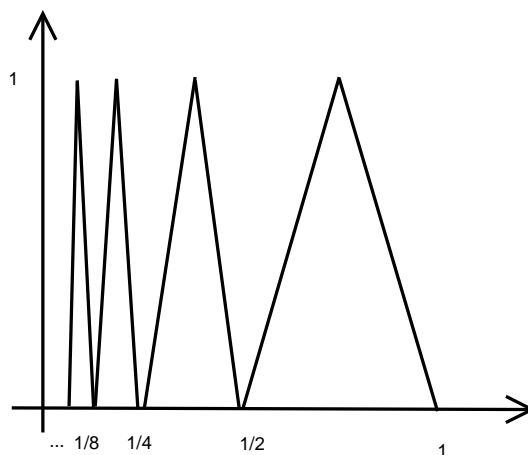


Figura 1: Funcion a integrar

es un triangulo de base $\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ y altura 1, por lo tanto:

$$A_n = \frac{1}{2^n}$$

Como la funcion comienza en cero, el area encerrada bajo la curva sera una suma infinita de areas:

$$A(f) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

La suma infinita se aproxima mediante el limite de sus sumas parciales:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2^{N+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Problema 17.3. Calcule el largo de la curva definida por la funcion periodica (discontinua) de periodo 2, $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ \cosh x & x \geq 1 \end{cases}$, en 10 periodos.

Solución 17.3. La formula del largo de una curva en el plano es $L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Separemos la curva en sus 2 partes:

Parte 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f'(x) &= 1 \\ L_0^2(f) &= \int_0^1 \sqrt{1 + 1} dx \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Parte 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x \\ f'(x) &= \sinh x \\ L_0^2(f) &= \int_1^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\cosh^2 x} dx \\ &= \int_1^2 \cosh x dx \\ &= \sinh 2 - \sinh 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el largo de la curva en 10 periodos es $10(\sqrt{2} + \sinh 2 - \sinh 1)$.