

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #13

Problema 13.1. Suponga que f es una función estrictamente creciente, biyectiva y continua en $[0, c]$ con $f(0) = 0$. Demostrar que para $a \in [0, c]$ y $b \in [0, f(c)]$, con $f(a) < b$, se tiene la *Desigualdad de Young*:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

y que la igualdad se tiene si y solo si $b = f(a)$.

Solución 13.1. Gráficamente, el problema se puede ver como lo muestra la figura: De la

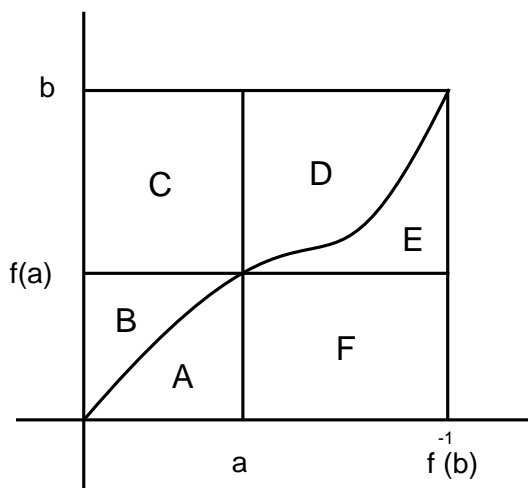


Figura 1: Desigualdad de Young

figura se puede inferir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} ab &= A + B + C \\ A &= \int_0^a f(x)dx \\ B + C + D &= \int_0^b f^{-1}(y)dy \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ab &= \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy - D \\ &\leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \end{aligned}$$

Para ver la igualdad, si se tiene $b = f(a)$, entonces solo se consideran las regiones A y B , con lo cual:

$$\begin{aligned} ab &= A + B \\ &= \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \end{aligned}$$

Problema 13.2. Resuelva las siguientes integrales indefinidas:

$$1. I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx, n \in \mathbb{N}$$

$$2. I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Usando los resultados anteriores, calcule:

$$1. \int \left[\operatorname{sen}^{24} x - \frac{23}{24} \operatorname{sen}^{22} x \right] dx$$

$$2. \int \left[\frac{1}{(1+x^2)^{100}} - \frac{197}{198(1+x^2)^{99}} \right] dx$$

Solución 13.2. .

1. Se puede considerar la integral de la forma:

$$I_n = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x dx$$

y luego se aplica la integracion por partes:

$$u(x) = \operatorname{sen}^{n-1} x, v'(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow u'(x) = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x, v(x) = -\cos x$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_n &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx \\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n-1) I_n \\
I_n(1 + (n-1)) &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx \\
I_n &= \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

Con esto, se tiene que $\int \left[\operatorname{sen}^{24} x - \frac{23}{24} \operatorname{sen}^{22} x \right] dx = \frac{-\operatorname{sen}^{23} x \cos x}{24} + C.$

2.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \\
&= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \\
&= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \\
&= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx
\end{aligned}$$

Usando integracion por partes para $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$ se tiene que:

$$u(x) = x, v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Rightarrow u'(x) = 1, v(x) = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

De esta forma, $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$

La formula resultante es:

$$\begin{aligned}
I_n &= I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\int \left[\frac{1}{(1+x^2)^{100}} - \frac{197}{198(1+x^2)^{99}} \right] dx = \frac{x}{198(1+x^2)^{99}}.$

Problema 13.3. Resuelva el problema:

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \int [x^2 - a \cos(nx)]^2 dx$$

Solución 13.3. Se trata de un problema de optimización, por lo tanto, consideremos la función $f(a) = \int [x^2 - a \cos(nx)]^2 dx$ y resolvamos $f'(a^*) = 0$, donde los valores de a^* son candidatos a ser mínimos.

Primero desarrollemos la integral:

$$\begin{aligned} \int [x^2 - a \cos(nx)]^2 dx &= \int [x^4 - 2x^2 a \cos(nx) + a^2 \cos^2(nx)] dx \\ &= \underbrace{\int x^4 dx}_{T(x)} - 2a \underbrace{\int x^2 \cos(nx) dx}_{S(x)} + a^2 \underbrace{\int \cos^2(nx) dx}_{R(x)} \\ &= a^2 R(x) - 2aS(x) + T(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(a) = a^2 R(x) - 2aS(x) + T(x)$, con lo cual $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2aR(x) - 2S(x) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{S(x)}{R(x)}$. Es decir,

$$a = \frac{\int x^2 \cos(nx) dx}{\int \cos^2(nx) dx}$$

Integrando por partes $R(x)$:

$$u(x) = \cos^2(nx), v'(x) = 1 \Rightarrow u'(x) = -2n \cos(nx) \sin(nx), v(x) = x$$

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cos^2(nx) + \int 2nx \cos(nx) \sin(nx) dx \\ &= x \cos^2(nx) + n \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(2nx)}_{v'} dx \\ &= x \cos^2(nx) + n \left[\frac{-x \cos(2nx)}{2n} + \int \frac{\cos(2nx)}{2n} dx \right] \\ &= x \cos^2(nx) + n \left[\frac{-x \cos(2nx)}{2n} + \frac{\sin(2nx)}{4n^2} \right] \\ &= x \cos^2(nx) - \frac{x \cos(2nx)}{2} + \frac{\sin(2nx)}{4n} \end{aligned}$$

Integrando por partes $S(x)$:

$$u(x) = x^2, v'(x) = \cos(nx) \Rightarrow u'(x) = 2x, v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$S(x) = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \frac{2}{n} \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(nx)}_{v'} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{2}{n} \left(\frac{-x \cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \int \cos(nx) dx \right) \\
&= \frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n^3}
\end{aligned}$$

Obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n^3}}{x \cos^2(nx) - \frac{x \cos(2nx)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{4n}} \\
&= \frac{\frac{(x^2 n^2 - 2) \operatorname{sen}(nx) + 2nx \cos(nx)}{n^3}}{\frac{4nx \cos^2(nx) - 2nx \cos(2nx) + \operatorname{sen}(2nx)}{4n}} \\
&= \frac{4((x^2 n^2 - 2) \operatorname{sen}(nx) + 2nx \cos(nx))}{n^2(4nx \cos^2(nx) - 2nx \cos(2nx) + \operatorname{sen}(2nx))}
\end{aligned}$$