

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #11

Resumen 1. Las primitivas mas comunes estan en la siguiente tabla:

| | |
|--|---|
| $\int 0dx = C$ | $\int adx = ax + C$ |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, x > 0$ |
| $\int e^x dx = e^x + C$ | $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ |
| $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$ |
| $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ | $\int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + C$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$ | $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \cos x + C$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctan} x + C$ | $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = x + C$ |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0$ | |

Integracion por Partes:

$$\int u(x) \frac{d}{dx} v(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x) \frac{d}{dx} u(x) dx + C$$

Cambio de variable:

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = \int g(y) dy$$

Problema 11.1. Calcule las siguientes integrales:

1. $\int x e^x dx$

2. $\int x \cos x dx$

3. $\int \ln x dx$

4. $\int e^x \cos x dx$

5. $\int (a + bx)^n dx$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx, a > 0$

7. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

8. $\int \arcsen x dx$

Solución 11.1. .

1. $\int x e^x dx$:

Integración por Partes: $u = x, v' = e^x \Rightarrow u' = 1, v = e^x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx + C \\ &= x e^x - e^x + C\end{aligned}$$

2. $\int x \cos x dx$:

Integración por Partes: $u = x, v' = \cos x \Rightarrow u' = 1, v = \sen x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= x \sen x - \int \sen x dx + C \\ &= x \sen x + \cos x + C\end{aligned}$$

3. $\int \ln x dx$:

Integración por Partes: $u = \ln x, v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, v = x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int dx + C \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

4. $\int e^x \cos x dx$:

Integración por Partes: $u = e^x, v' = \cos x \Rightarrow u' = e^x, v = \sin x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_J + C \end{aligned}$$

Para J , hacemos $u = e^x, v' = \sin x \Rightarrow u' = e^x, v = -\cos x$, nos queda:

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x dx \right) + C \\ I &= e^x \sin x + e^x \cos x - I + C \\ 2I &= e^x \sin x + e^x \cos x + C \\ I &= \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + \tilde{C} \end{aligned}$$

5. $\int (a + bx)^n dx$:

Por cambio de variable: $y = a + bx \Rightarrow x = \frac{y - a}{b} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{b}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int (a + bx)^n dx &= \int (a + b(\frac{y - a}{b}))^n \frac{dx}{dy} dy \\ &= \int y^n \frac{dy}{b} \\ &= \frac{y^{n+1}}{b(n+1)} \\ &= \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} \end{aligned}$$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx, a > 0$:

Por cambio de variable: $y = \frac{x}{\sqrt{a}} \Rightarrow x = y\sqrt{a} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{a}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{a}})^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{a} dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \arcsen y + C \\ &= \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C \end{aligned}$$

7. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$:

Por cambio de variable: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx &= \int \frac{\cos(y)}{e^y} \frac{dx}{dy} dy \\ &= \int \frac{\cos(y)}{e^y} e^y dy \\ &= \int \cos(y) dy \\ &= \sin y + C \\ &= \sin(\ln x) + C \end{aligned}$$

8. $\int \arcsen x dx$:

Por Partes: $u = \arcsen x, v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$, nos queda:

$$\int \arcsen x dx = x \arcsen x - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_J + C$$

Para J hacemos el cambio de variable: $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2y dy = -2x dx \Rightarrow y dy = -x dx$:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{-y dy}{y} \\ &= -y + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral resulta:

$$\begin{aligned} \int \arcsen x dx &= x \arcsen x - (-\sqrt{1-x^2}) + \tilde{C} \\ &= x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + \tilde{C} \end{aligned}$$

Problema 11.2. Demuestre que la función $f(x) = e^x$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ no vacío.

Solución 11.2. Veamos los valores de $M_i(f)$ y $m_i(f)$ para una partición equiespaciada $P_n = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ ($m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i(f) = \sup\{f(x) :$

$x \in [x_{i-1}, x_i]\}$):

$$\begin{aligned} m_i(f) &= e^{x_{i-1}} \\ M_i(f) &= e^{x_i} \end{aligned}$$

Calculemos la suma inferior y superior (como la particion es equiespaciada, $(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$):

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n e^{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \\ &= (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{e^{a+\frac{b-a}{n}(i-1)}}{n} \\ S(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n e^{x_i}(x_i - x_{i-1}) \\ &= (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{e^{a+\frac{b-a}{n}i}}{n} \end{aligned}$$

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n e^{a+\frac{b-a}{n}(i-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)e^{a-\frac{b-a}{n}}}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{b-a}{n}i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)e^{a-\frac{b-a}{n}}}{n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)e^{a-\frac{b-a}{n}}}{n} \frac{e^{\frac{b-a}{n}(n+1)} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \frac{e^b - e^{a-\frac{b-a}{n}}}{n(e^{\frac{b-a}{n}} - 1)} \\ &= \frac{e^b - e^a}{b-a} (b-a) \\ &= e^b - e^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n e^{a + \frac{b-a}{n}i} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)e^a}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{b-a}{n}i} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)e^a}{n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{b-a}{n}} \right)^i \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)e^a}{n} \frac{e^{\frac{b-a}{n}(n+1)} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \frac{e^b - e^a}{n(e^{\frac{b-a}{n}} - 1)} \\
&= \frac{e^b - e^a}{b-a} (b-a) \\
&= e^b - e^a
\end{aligned}$$

Es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists P_n \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $|S(f, P_n) - s(f, P_n)| < \epsilon$, por lo tanto, $f(x) = e^x$ es integrable en cada intervalo real no vacío.

Se puede argumentar que como es monótona y acotada en $[a, b]$, por la proposición 2.9 del apunte, e^x es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Problema 11.3. Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ también lo es.

Solución 11.3. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se tiene:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) |S(f, P) - s(f, P)| < \epsilon \quad (*)$$

Hay que probar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) |S(|f|, P) - s(|f|, P)| < \epsilon$.

Sea $\epsilon > 0$. Definamos $\Delta = |S(|f|, P) - s(|f|, P)|$, es decir,

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)| - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)| \right] (x_i - x_{i-1}) \right|$$

Sean $x_1, x_2 \in [x_{i-1}, x_i] = I$. Sabemos que $f(x_1) = f(x_2) + f(x_1) - f(x_2)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|f(x_1)| &\leq |f(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)| \\
|f(x_1)| &\leq |f(x_2)| + \left| \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right| \\
\sup_{x \in I} |f(x)| &\leq \inf_{x \in I} |f(x)| + \left| \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right| \\
\sup_{x \in I} |f(x)| - \inf_{x \in I} |f(x)| &\leq \left| \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right| \\
\left[\sup_{x \in I} |f(x)| - \inf_{x \in I} |f(x)| \right] (x_i - x_{i-1}) &\leq \left[\left| \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right| \right] (x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in I} |f(x)| - \inf_{x \in I} |f(x)| \right] (x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \\ \Delta &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Podemos tomar la particion P que satisface (*), con lo cual tenemos

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) < \epsilon$$