

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #9

Problema 9.1. Sea $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y acotada con k raíces reales y distintas $r_1 < \dots < r_k$. Sea $\alpha > 0$. Pruebe que $P(x) - \alpha P'(x)$ tiene al menos k raíces reales distintas. Para ello considere la función

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) P(x)$$

Pruebe que:

1. f es derivable en \mathbb{R} y calcular f' .
2. f' se anula al menos una vez en cada intervalo (r_i, r_{i+1}) con $i \in \{1, \dots, k-1\}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
4. f' también se anula en algún punto de (r_k, ∞) .
5. Concluir.

Solución 9.1. 1. f es derivable por ser producto de funciones derivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) P(x) + \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) P'(x) \\ &= \frac{-1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) (P(x) - \alpha P'(x)) \end{aligned}$$

2. Como $\frac{-1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) > 0$, f' se anula en algún punto si y solo si $P(x) - \alpha P'(x)$ se anula en algún punto.
En el intervalo (r_i, r_{i+1}) , se tiene que $f(r_i) = f(r_{i+1}) = 0$, luego, por el teorema de Rolle, se tiene que existe $c_i \in (r_i, r_{i+1})$ tal que $f'(c_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$.
3. Como P es acotada se tiene que $|P(x)| \leq M$ para algún $M \geq 0$. Por lo tanto:

$$-M \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \leq f(x) \leq M \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) = 0$, por teorema del sandwich se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

4. Sea $\epsilon > 0$. Se tiene que $r_k + \epsilon \in (r_k, \infty)$. Como f se anula en r_1, \dots, r_k , se debe tener que $f(r_k + \epsilon) \neq 0$, mas aun, $\forall x > r_k, f(x) \neq 0$. Sin perdida de generalidad supongamos $f(x) > 0$.

En el intervalo $[r_k, r_k + \epsilon]$ f es continua, por el teorema de Weierstrass, f es acotada y alcanza su maximo y minimo en $[r_k, r_k + \epsilon]$.

Como $\forall x > r_k, f(x) \neq 0$, se debe tener que r_k es un minimo ($f(r_k) = 0$). Como f es diferenciable en $(r_k, r_k + \epsilon)$ se pueden tener 2 opciones para el punto x^* donde se alcanza el maximo:

- a) $f'(x^*) = 0$ con $x^* \in (r_k, r_k + \epsilon)$
- b) $x^* = r_k + \epsilon$ y $\forall x \in [r_k, r_k + \epsilon], f(x) \leq f(x^*)$

Si se cumple lo primero, estamos listos. Supongamos se cumple lo segundo y que ademas $f'(r_k + \epsilon) \neq 0$, pues si fuera igual a cero estaríamos listos.

Veamos si existe $\eta > r_k + \epsilon$ tal que $f(r_k + \epsilon) = f(\eta)$. Supongamos que no existe, en est caso pueden darse 2 situaciones:

- a) $(\forall x > r_k + \epsilon) f(x) > f(r_k + \epsilon)$. Esto no puede suceder pues la funcion tiende a cero cuando x tiende a ∞ .
- b) $(\forall x > r_k + \epsilon) f(x) < f(r_k + \epsilon)$. Como f es diferenciable y $(\forall x \in (r_k, r_k + \epsilon)) f(x) \leq f(r_k + \epsilon) \wedge (\forall x \in (r_k + \epsilon, \infty)) f(x) < f(r_k + \epsilon)$, se debe tener que $f'(r_k + \epsilon) = 0$.

Por lo tanto $\exists \eta > r_k + \epsilon$ tal que $f(\eta) = f(r_k + \epsilon)$. Por el teorema de Rolle se tiene que $\exists \xi \in (r_k + \epsilon, \eta)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

5. En la parte 2 vimos que existian $k - 1$ punto donde f' se anula. En la parte 4 vimos que existia otro punto donde f' se anula. Como la parte 2 dice que f' se anula si y solo si $P(x) - \alpha P'(x)$ se anula, encontramos k punto donde $P(x) - \alpha P'(x)$ se anula.

Problema 9.2. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuacion

$$\exp(2 \arcsen(xy)) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las absisas con $x > 0$.

Solución 9.2. Se debe aplicar la derivacion implicita.

$$\begin{aligned} \exp(2 \arcsen(xy)) &= \ln(1 + x^2 + y^2) \quad / \frac{d}{dx} \\ \exp(2 \arcsen(xy)) (2 \arcsen(xy))' &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)' \\ \exp(2 \arcsen(xy)) \frac{2}{\sqrt{1 - (xy)^2}} (y + xy') &= \frac{2x + 2yy'}{1 + x^2 + y^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Imponiendo $y = 0$ (la curva corta al eje de las abscisas):

$$\begin{aligned}\exp(2 \arcsen(0)) &= \ln(1 + x^2) \\ 1 &= \ln(1 + x^2) \\ e &= 1 + x^2 \\ x &= \sqrt{e - 1} \\ P &= (\sqrt{e - 1}, 0)\end{aligned}$$

Evaluo P en (1):

$$\begin{aligned}e^0 \frac{2}{\sqrt{1-0}}(0 + \sqrt{e-1}y'_p) &= \frac{2\sqrt{e-1} + 0}{1 + (\sqrt{e-1})^2} \\ 2\sqrt{e-1}y'_p &= \frac{2\sqrt{e-1}}{e} \\ y'_p &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Luego, la ecuacion de la recta tangente a la curva en el punto $P = (\sqrt{e-1}, 0)$ es ($m = y'_p, x_0 = \sqrt{e-1}, y_0 = 0$):

$$\begin{aligned}y - 0 &= \frac{1}{e}(x - \sqrt{e-1}) \\ y &= \frac{x - \sqrt{e-1}}{e}\end{aligned}$$

Problema 9.3. Escribir la ecuacion parametrica de una elipse cuyo eje horizontal mide 8 y cuyo eje vertical mide 4. Calcular $y'(x)$.

Solución 9.3. ■ **Primera forma:** La ecuacion de la elipse es $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$. Utilizemos coordenadas polares:

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos(t) \\ y(t) &= r \sen(t)\end{aligned}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. De la ecuacion de la elipse, se tiene que $y^2 = 4 - \frac{x^2}{2}$, luego

$$r = \sqrt{4 + \frac{3x^2}{4}}.$$

De la primera ecuacion, obtenemos $\cos(t) = \frac{x}{r}$ y $\sen(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$:

$$y = \sqrt{4 + \frac{3x^2}{4}} \sen(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4 + \frac{3x^2}{4}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \\
&= \sqrt{4 + \frac{3x^2}{4}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 + \frac{3x^2}{4}}} \\
&= \sqrt{4 + \frac{3x^2}{4}} \sqrt{\frac{16 - x^2}{16 + 3x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{16 + 3x^2}{4}} \sqrt{\frac{16 - x^2}{16 + 3x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{16 - x^2}{4}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{16 - x^2}} - 2x}{4} \\
&= \frac{-\frac{x}{2}}{\sqrt{16 - x^2}} \\
&= \frac{-\frac{x}{2}}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}}
\end{aligned}$$

- **Segunda forma:** Consideremos $x = u(t) = 4 \cos(t)$ e $y = v(t) = 2 \sin(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Recordemos la formula:

$$\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Como $u^{-1}(x) = t = \arccos(\frac{x}{4})$, se tiene que $y = v(u^{-1}(x))$ con $t \in [0, \pi]$ para que sea funcion. De la formula se tiene:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{dv}{dt}(u^{-1}(x_0)) \frac{du^{-1}}{dx}(x_0)$$

Como $u(t) = 4 \cos(t)$ es biyectiva y derivable, se cumple que $(u^{-1}(x))' = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))}$, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\frac{dv}{dt}(u^{-1}(x_0))}{\frac{du}{dt}(u^{-1}(x_0))}$$

Tenemos $\frac{dv}{dt} = 2 \cos(t)$ y $\frac{du}{dt} = -4 \sin(t)$, es decir,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{2 \cos(\arccos(\frac{x}{4}))}{-4 \sin(\arccos(\frac{x}{4}))}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cos(\arccos(\frac{x}{4}))}{-4\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(\frac{x}{4}))}} \\
&= \frac{2\frac{x}{4}}{-4\sqrt{1 - (\frac{x}{4})^2}} \\
&= \frac{-\frac{x}{2}}{4\sqrt{1 - (\frac{x}{4})^2}}
\end{aligned}$$