

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #7

Recuerdo 1. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k + 1)$ veces derivable en el intervalo (a, b) y sea T_f^k su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $x_0 \in (a, b)$, entonces para todo $x > x_0$ (respectivamente $x < x_0$) existe $\xi_x \in (x_0, x)$ (respectivamente en (x, x_0)) tal que

$$f(x) = T_f^k(x - x_0) + \frac{f^{(k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

Problema 7.1. Analizar la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$, encontrando su dominio, ceros, intersección con el eje OY, continuidad, asíntotas, puntos críticos, crecimiento, concavidad/convexidad y graficar.

Solución 7.1. Revisemos cada punto por separado:

DOMINIO: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

CEROS: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pero como $x \notin \text{Dom}(f)$, la función no tiene ceros, $Z(f) = \emptyset$.

INTERSECCIÓN CON EJE OY: $f(0)$ no existe, luego, la intersección con el eje OY es \emptyset .

CONTINUIDAD: Como es composición de funciones continuas y por álgebra de funciones continuas, es continua en su dominio.

ASÍNTOTAS: Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = -\infty$, luego, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \infty$, luego, tiene dos asíntotas verticales, $x = 2$ y $x = -2$.

Asíntotas oblicuas: Revisemos los límites $m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ (o también $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$) y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$ (si existen)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\
&= 1 \\
n &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tiene como asíntota oblicua a la recta $y = x$. Como la función es par, si $x \rightarrow -\infty$, se tiene como asíntota oblicua la recta $y = -x$.

PUNTOS CRÍTICOS: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 8)}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}} = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$.

Como $0 \notin \text{Dom}(f)$, solo se consideran los puntos $x = \pm 2\sqrt{2}$. Los puntos donde se indefina la derivada son los pertenecientes al intervalo $(-2, 2)$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 32}{(x^2 - 4)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow (\forall x \in \text{Dom}(f'')) f''(x) > 0.$$

CRECIMIENTO:

x	$(-\infty, -2\sqrt{2})$	$(-2\sqrt{2}, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 2\sqrt{2})$	$(2\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	-	+		-	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow		\searrow	\nearrow

Con esto, los puntos $x = -2\sqrt{2}$ y $x = 2\sqrt{2}$ son mínimos globales (pues $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2})$).

CONCAVIDAD/CONVEXIDAD:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	+		+
$f(x)$	\smile		\smile

GRAFICO:

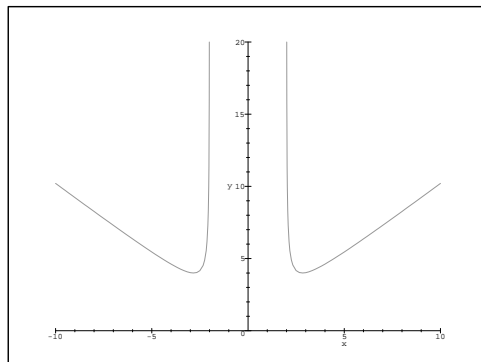


Figura 1: Función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Problema 7.2. Calcule el desarrollo de Taylor de orden 4 en torno a $x_0 = 0$ de la función $f(x) = -\ln(1 - x)$.

Solución 7.2. El desarrollo de Taylor de orden 4 en torno a x_0 es de la forma:

$$T_f^4(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

Las derivadas de $f(x)$ son de la forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x} \\ f''(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f^{(4)} &= \frac{6}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Evaluando en $x_0 = 0$, se tiene que $f(0) = 0$, $f'(0) = f''(0) = 1$, $f'''(0) = 2$ y $f^{(4)}(0) = 6$. Reemplazando, se obtiene:

$$T_f^4(x) = 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

Problema 7.3. Determine el intervalo I tal que si $x \in I$, la fórmula $\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}$ de un resultado con 3 decimales exactos.

Solución 7.3. Consideremos $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$. Realizemos su desarrollo de Taylor de orden 2 en torno a $x_0 = 0$ y utilizemos (1):

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}} \\
 f''(x) &= \frac{-4}{25}(1+x)^{-\frac{9}{5}} \\
 f'''(x) &= \frac{36}{125}(1+x)^{-\frac{14}{5}} \\
 &\Downarrow \\
 f(x) &= 1 + \frac{x}{5} + \frac{-2x^2}{25} + \underbrace{\frac{36}{125(1+\xi_x)^{\frac{14}{5}} \frac{x^3}{6}}}_{R_3(x)}
 \end{aligned}$$

con $\xi_x \in (0, x)$. Como se pide que el resultado tenga tres decimales exactos, se debe cumplir que $|R_3(x)| < 0,001$, es decir:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{36}{125(1+\xi_x)^{\frac{14}{5}} \frac{x^3}{6}} \right| &< 10^{-3} \\
 \left| \frac{6}{125}(1+\xi_x)^{-\frac{14}{5}} x^3 \right| &< 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Como $0 < \xi_x < x$, se tiene que $\left| \frac{6}{125}(1+\xi_x)^{-\frac{14}{5}} x^3 \right| < \left| \frac{6}{125} x^3 \right| \leq 10^{-3}$, lo cual implica que $|x^3| \leq \frac{125}{6 \cdot 10^3} = \frac{1}{6 \cdot 2^3} \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{6}}$.