

CÁLCULO - PRIMAVERA 2004

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Oscar Peredo, Jorge Lemus

CLASE AUXILIAR #5

Problema 5.1. Estudiar la función $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$, encontrando su dominio, ceros, intersección con el eje OY, continuidad, asíntotas, puntos críticos, crecimiento, concavidad/convexidad y graficar.

Solución 5.1. Revisemos cada punto por separado:

DOMINIO: Como $\sqrt[3]{\cdot}$ tiene dominio \mathbb{R} , al igual que $3x^2 - x^3$, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

CEROS: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - x) = 0$, es decir, $Z(f) = \{0, 3\}$.

INTERSECCION CON EJE OY: $f(0) = 0$, luego, la intersección con el eje OY es $\{0\}$.

CONTINUIDAD: Es una composición y suma de funciones continuas, por lo tanto es continua.

ASINTOTAS: Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} = \infty$, luego, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: como es continua, no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas oblicuas: Revisemos los límites $m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ (o también $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$) y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$ (si existen)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{3x^2 - x^3}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} \\ &= -1 \\ \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{3}{x} - 1\right)^{-\frac{2}{3}} \left(-\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{3-x}\right)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tiene como asíntota oblicua a la recta $y = -x + 1$.

PUNTOS CRÍTICOS: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(6x - 3x^2) = 0 \Rightarrow 6x = 3x^2 \Rightarrow 2 = x$. La derivada no está definida en $\{0, 3\}$, por lo tanto los puntos críticos para $f'(x)$ son $\{0, 2, 3\}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{-2}{9} \left(\frac{(6x - 3x^2)^2}{3x - x^3} \right) + 2 - 2x \right] = 0 \Rightarrow \left[(3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} = 0 \right] \vee \left[9x^2(2-x)^2 = \frac{9}{2}(2-2x)(3x-x^3) \right] \Rightarrow [x(3-x) = 0] \vee \left[9x^2(2-x)^2 - \frac{9}{2}(2-2x)(3x-x^3) = 0 \right] \Rightarrow [x(3-x) = 0] \vee [-3x^2 = 0]$, por lo tanto, los valores de x tales que $f''(x) = 0$ son $\{0, 3\}$, sin embargo, f'' no está definida en $\{0, 3\}$, luego, $f''(x) \neq 0, \forall x \in \text{Dom}(f'')$. Los puntos críticos para $f''(x)$ son $\{0, 3\}$.

CRECIMIENTO: En el intervalo $(-\infty, 0)$, se tiene que $f'(x) \leq 0$, luego $f(x)$ es decreciente en ese intervalo. En $(0, 2)$, se tiene que $f'(x) \geq 0$, luego $f(x)$ es creciente. En $(2, 3)$, $f'(x) \leq 0$, luego $f(x)$ es decreciente. Finalmente, en $(3, \infty)$ $f'(x) \leq 0$, luego $f(x)$ es decreciente. Es decir:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow

Con esto, los puntos $x = 0$ y $x = 2$ son mínimos locales.

CONCAVIDAD/CONVEXIDAD: En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) \leq 0$, luego $f(x)$ es cóncava en ese intervalo. En $(0, 3)$, $f''(x) \leq 0$, luego $f(x)$ es cóncava. Finalmente, en $(3, \infty)$, $f''(x) \leq 0$, luego $f(x)$ es cóncava. Es decir¹:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	-	-	-
$f(x)$	\frown	\frown	\frown

GRAFICO:

¹ \frown : convexa, \smile : cóncava.

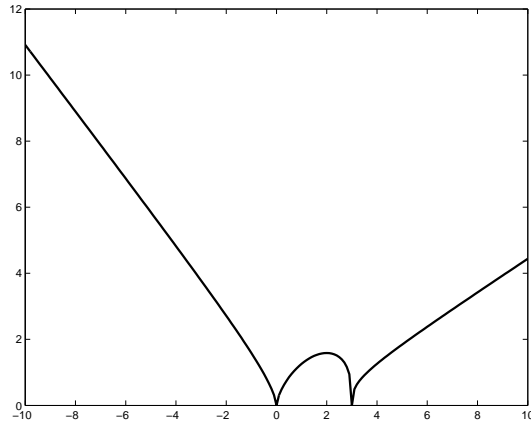


Figura 1: Función $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Problema 5.2. Encuentre el triángulo rectángulo de área máxima entre todos los triángulos de perímetro $2p$.

Solución 5.2. Se tienen las siguientes relaciones entre los lados x, y, z del triángulo:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2p \\ x^2 + z^2 &= y^2 \\ A(x, z) &= \frac{xz}{2} \end{aligned}$$

Con estas relaciones, se puede deducir que:

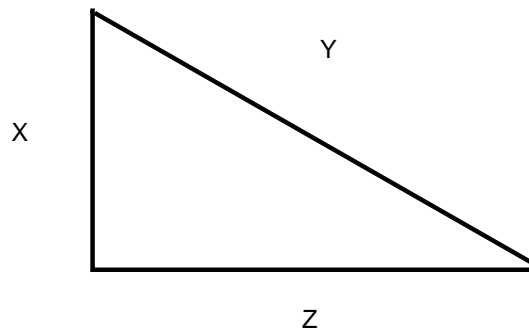


Figura 2: Triángulo de perímetro $2p = x + y + z$.

$$\begin{aligned} y &= 2p - x - z \\ y^2 &= 4p^2 + x^2 + z^2 - 4px - 4pz + 2xz \\ 0 &= 4p^2 - 4px - 4pz + 2xz \\ z(x) &= \frac{2p(p - x)}{2p - x} \end{aligned}$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} A(x, z(x)) &= \frac{xz(x)}{2} \\ &= \frac{2px(p-x)}{2(2p-x)} \\ &= p \frac{px - x^2}{2p-x} \end{aligned}$$

Como $A(x, z(x)) = A(x)$, al derivar se obtiene:

$$A'(x) = p \frac{x^2 - 4px + 2p^2}{(2p-x)^2}$$

Los puntos criticos satisfacen $x^2 - 4px + 2p^2 = 0$, es decir, $\{p(2 + \sqrt{2}), p(2 - \sqrt{2})\}$. Como $2p < p(2 + \sqrt{2})$, el unico punto critico aceptable es $x = p(2 - \sqrt{2})$, luego, $z = p(2 - \sqrt{2})$ y $y = 2p(\sqrt{2} - 1)$. Para verificar que se trata de un maximo y no de un minimo, se puede proceder de dos formas:

- Ver el signo de $A'(x)$ en $(0, p(2 - \sqrt{2}))$ y en $(p(2 - \sqrt{2}), 2p)$, dando como resultados $+$ y $-$ respectivamente, con lo cual, el area sera creciente en $(0, p(2 - \sqrt{2}))$ y decreciente en $(p(2 - \sqrt{2}), 2p)$, lo que implica que $x = p(2 - \sqrt{2})$ es un maximo global.
- Ver el signo de $A''(x)$ en $(0, 2p)$.

$$\begin{aligned} A''(x) &= \frac{(2p-x)^2(2x-4p) - (x^2-4px+2p^2)(2(2p-x)(-1))}{(2p-x)^4} \\ &= \frac{2p-x}{(2p-x)^4} [-4p^2] \\ &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $A(x)$ es concava en $(0, 2p)$, luego $x = p(2 - \sqrt{2})$ es un maximo global.