

Clases Auxiliares del curso MA12A - Cálculo
Otoño 2004

Prof. Cátedra: Axel Osses
Prof. Auxiliares: Jorge Lemus, Oscar Peredo

13 de julio de 2004

Índice general

1. Auxiliares para el Control 1	4
1.1. Auxiliar 1	4
1.2. Auxiliar 2	7
1.3. Auxiliar 3	11
1.4. Auxiliar 4	14
1.5. Auxiliar 5	16
1.6. Auxiliar 6	19
1.7. Auxiliar 7	20
1.8. Auxiliar 8	26
1.9. Auxiliar 9	30
1.10. Auxiliar Extra 1	33
1.11. Pauta Ejercicio 1	35
2. Auxiliares para el Control 2	39
2.1. Auxiliar 11	39
2.2. Auxiliar 12	45
2.3. Auxiliar 13	47
2.4. Auxiliar 14	51
2.5. Auxiliar 15	53
2.6. Auxiliar 16	56
2.7. Auxiliar 17	58
2.8. Auxiliar 18	61
2.9. Auxiliar 19	63
2.10. Pauta Ejercicio 2	66
3. Auxiliares para el Control 3	68
3.1. Auxiliar 20	68
3.2. Auxiliar 21	70
3.3. Auxiliar 22	72
3.4. Auxiliar 23	75
3.5. Auxiliar 24	78
3.6. Auxiliar 25	80
3.7. Auxiliar 26	81
3.8. Auxiliar Extra 3	84

Índice de figuras

1.1.	Representacion del problema (1.7.1).	20
1.2.	representacion del problema (1.7.2)	21
1.3.	Representacion del problema (1.7.3)	23
1.4.	Lugar geometrico del problema (1.8.2)	27
1.5.	Representacion del problema (1.8.3)	27
1.6.	Lugar geometrico del problema (1.8.4)	28
2.1.	Función $f(x) = \frac{x+1}{1- x }$.	40
2.2.	Función $f(x) = (x^4 - 4)\sqrt{1-x^2}$.	41
2.3.	$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 4x - 7}$	43
2.4.	$f(x) = x^3 \cdot \sqrt{ x }$	44
2.5.	Cohete de altura h que se encuentra a M metros de distancia de un observador.	47
2.6.	Graficos de f_n para distintos valores de n .	49
2.7.	Gráfico de $g(x) = \frac{x}{ x -2}$.	51
2.8.	Triángulo perpendicular a un plano.	61
2.9.	Gráfico de $f(x) = \frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}$.	62
2.10.	Grafico de $f(y) = \frac{\log y}{y}$	65

Prólogo

Esta recopilación de problemas fue realizada para el curso MA12A - Cálculo, dictado en Otoño del 2004 en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile. Los problemas listados han sido recopilados de auxiliares de años anteriores, libros, apuntes, fotocopias, manuscritos, etc, además de los resueltos por los propios auxiliares. Las materias que se abordan son:

1. Para el Control 1:

- Axiomas de los Reales
- Inecuaciones
- Geometría Analítica

2. Para el Control 2:

- Funciones sobre los Reales
- Trigonometría
- Sucesiones

3. Para el Control 3:

- Sucesiones
- Límites
- Continuidad

Oscar Peredo

Capítulo 1

Auxiliares para el Control 1

1.1. Auxiliar 1

Problema 1.1.1. Pruebe (usando los axiomas de la suma, producto y orden) que:

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$

2. Si $b > a > 0$ y $c > 0$, entonces $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

Solución:

1.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= (a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}) \\ &= (a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}) \cdot 1 && /(\text{neutro multiplicativo}) \\ &= (a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}) \cdot (b \cdot d)^{-1} \cdot b \cdot d && /(\text{recíprocos}) \\ &= (a \cdot b^{-1} \cdot b \cdot d + c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot d) \cdot (b \cdot d)^{-1} && /(\text{conmutatividad y distributividad}) \\ &= (a \cdot 1 \cdot d + c \cdot 1 \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} && /(\text{recíprocos y conmutatividad}) \\ &= (a \cdot d + c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} \\ &= \frac{ad + cb}{bd} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+c} &> \frac{a}{b} && / \cdot b \cdot (b+c) \text{ (como ambos son positivos, se mantiene la desigualdad)} \\ b \cdot (a+c) &> a \cdot (b+c) \\ b \cdot a + b \cdot c &> a \cdot b + a \cdot c && /(\text{distributividad}) \\ a \cdot b + b \cdot c &> a \cdot b + a \cdot c && /+(-a \cdot b) \\ b \cdot c &> a \cdot c && / \cdot c^{-1} \\ b \cdot c \cdot c^{-1} &> a \cdot c \cdot c^{-1} \\ b &> a \end{aligned}$$

Se realiza el procedimiento inverso y se obtiene lo que se quería probar.

Problema 1.1.2. Pruebe (usando los axiomas de la suma, producto y orden) que si $0 < a \leq c$ y $0 < b \leq c$ entonces $\frac{a+b}{1+\frac{ab}{c^2}} \leq c$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{1+\frac{ab}{c^2}} &\leq c && / \cdot (1+(ab)c^{-2}) \text{ (como es positivo, se mantiene la desigualdad)} \\
a+b &\leq c \cdot (1+(ab)c^{-2}) \\
a+b &\leq c + (ab)c^{-1} && / \cdot (ab)^{-1} \text{ (se mantiene la desigualdad)} \\
a^{-1} + b^{-1} &\leq c(ab)^{-1} + c^{-1} && / + (-c^{-1}) \\
a^{-1} + b^{-1} - c^{-1} &\leq c(ab)^{-1} && / + (-b^{-1}) \\
a^{-1} - c^{-1} &\leq c(ab)^{-1} - b^{-1} \\
a^{-1} - c^{-1} &\leq cb^{-1} \cdot (a^{-1} - c^{-1}) && / \cdot (a^{-1} - c^{-1})^{-1} \text{ (se mantiene la desigualdad)} \\
1 &\leq cb^{-1} \\
b &\leq c
\end{aligned}$$

Se realiza el procedimiento inverso y se obtiene lo que se quería probar.

Problema 1.1.3. Pruebe (usando los axiomas de la suma y producto) que:

$$ab^{-1} - (cb + 2ab)b^{-2} = -(a + c)b^{-1}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
ab^{-1} - (cb + 2ab)b^{-2} &= ab^{-1} - (cbb^{-2} + 2abb^{-2}) && / (\text{distributividad}) \\
&= ab^{-1} - (cbb^{-1}b^{-1} + 2abb^{-1}b^{-1}) && / (\text{definición de potencia}) \\
&= ab^{-1} - (cb^{-1} + 2ab^{-1}) && / (\text{recíprocos}) \\
&= ab^{-1} + (-1)(cb^{-1} + 2ab^{-1}) && / (\text{neutro multiplicativo y inverso aditivo}) \\
&= ab^{-1} + ((-1)cb^{-1} + (-1)2ab^{-1}) && / (\text{distributividad}) \\
&= ab^{-1} + (-1)cb^{-1} + (-1)2ab^{-1} \\
&= (a + (-1)c + (-1)2a)b^{-1} && / (\text{distributividad}) \\
&= (a - c - 2a)b^{-1} \\
&= (-a - c)b^{-1} \\
&= -(a + c)b^{-1} && / (\text{distributividad de -1})
\end{aligned}$$

Problema 1.1.4. Resuelva las siguientes desigualdades:

$$1. \quad (-10x + 5 < 0) \wedge (x > 9) \wedge (x \leq 15)$$

$$2. \quad \frac{3}{15x - 8} < 0$$

$$3. \quad (x - 2)(3x + 2)(2x - 1) \leq 0$$

Solución:

1.

Los conjuntos definidos por las desigualdades son:

$$\begin{aligned}A &= \{x : \frac{1}{2} < x\} \\B &= \{x : 9 < x\} \\C &= \{x : 15 \geq x\}\end{aligned}$$

Claramente, $A \cap B = B$, pues $B \subset A$. Luego, el conjunto solución será $B \cap C = \{x : 9 < x \leq 15\} = (9, 15]$.

2.

Como $3 > 0$, debemos encontrar el conjunto solución tal que sus elementos cumplan $15x - 8 < 0$, es decir, $\{x : x < \frac{8}{15}\} = (-\infty, \frac{8}{15})$.

3.

Como son 3 elementos multiplicados basta con que al menos uno sea igual a 0 (1), 2 sean positivos y el otro negativo (2) o los 3 negativos (3). Para la situación (1), el conjunto solución es $A = \{2, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2}\}$.

Para la situación (2), podemos tener $((x - 2) \geq 0 \wedge (3x + 2) \geq 0 \wedge (2x - 1) \leq 0) \vee ((x - 2) \geq 0 \wedge (3x + 2) \leq 0 \wedge (2x - 1) \geq 0) \vee ((x - 2) \leq 0 \wedge (3x + 2) \geq 0 \wedge (2x - 1) \geq 0)$, lo cual nos da como conjunto solución $B = \{x : x \geq 2 \wedge x \geq \frac{-2}{3} \wedge x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{x : x \geq 2 \wedge x \leq \frac{-2}{3} \wedge x \geq \frac{1}{2}\} \cup \{x : x \leq 2 \wedge x \geq \frac{-2}{3} \wedge x \geq \frac{1}{2}\} = \emptyset \cup \emptyset \cup [\frac{1}{2}, 2] = [\frac{1}{2}, 2]$.

Para la situación (3), utilizando el mismo razonamiento, obtenemos el conjunto solución $C = \{x : x \leq 2 \wedge x \leq \frac{-2}{3} \wedge x \leq \frac{1}{2}\} = (-\infty, \frac{-2}{3}]$.

Por lo tanto, la solución de la inecuación está dada por $A \cup B \cup C = (-\infty, \frac{-2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$.

(Realizar método de $+/-$)

1.2. Auxiliar 2

Problema 1.2.1. Probar que:

1. $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$
2. $0 < x < 1 \leq y \Rightarrow xy + 1 \leq x + y$
3. $a^2 + ab + b^2 \geq \pm ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$
4. $a^2 + ab + b^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$
5. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Solución:

1.

Hay que probar que $x < \frac{x+y}{2} \wedge \frac{x+y}{2} < y$.

(1) $x < \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{x+y-2x}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{2} > 0 \Leftrightarrow y-x > 0$, lo cual es cierto por la hipótesis.

(2) $\frac{x+y}{2} < y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - y < 0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} < 0 \Leftrightarrow x < y$.

Juntando (1) y (2) se obtiene lo que se quiere probar.

2.

Tenemos que ver que $xy + 1 - x - y \leq 0$.

$xy + 1 - x - y = xy - x + 1 - y = x(y-1) + (1-y) = x(y-1) - (y-1) = (x-1)(y-1)$, como $x < 1 \Rightarrow (x-1) < 0$ y como $y \geq 1 \Rightarrow (y-1) \geq 0$, luego $(x-1)(y-1) \leq 0$.

3.

$a^2 + b^2 \geq 0$, pues es suma de números positivos. Si sumamos ab en ambos lados nos queda $a^2 + ab + b^2 \geq ab$. Para ver que $a^2 + ab + b^2 \geq -ab$ notamos que $(a+b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \geq -ab$.

4.

Hay que probar que $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + ab + b^2 \geq 0$, usemos la parte anterior. En el caso en que $ab \geq 0$, tenemos que $a^2 + ab + b^2 \geq ab \geq 0$. El otro caso es que $ab \leq 0$, entonces tenemos $a^2 + ab + b^2 \geq -(ab) \geq 0$.

5.

Primero usemos que $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Análogamente, tenemos que $b^2 + c^2 \geq 2bc$ y $a^2 + c^2 \geq 2ac$, lo cual implica que $(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Problema 1.2.2. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$$

Demostrar que

$$S = \frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n + x_{n-1}} + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}$$

Indicacion: Para esto, siga los siguientes pasos:

1. $\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}$
2. $\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2 - x_1^2}{x_n + x_1} = 0$
3. $2S = S + S$

Solución:

Probemos la indicacion:

1.
Sabemos que $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2a + 2b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) \geq \frac{(a + b)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}$, pues $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

2.
Notemos que $\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = x_1 - x_2$. Luego $\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2 - x_1^2}{x_n + x_1} = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - x_4 + \dots + x_{n-1} - x_n + x_n - x_1 = 0$.

De aca vemos que

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2 - x_1^2}{x_n + x_1} = 0$$

separando terminos,

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} - \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} - \frac{x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} - \frac{x_1^2}{x_n + x_1} = 0$$

juntando los terminos positivos y negativos obtenemos

$$\left(\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \right) - \left(\frac{x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_1^2}{x_n + x_1} \right) = 0$$

lo que es equivalente con $S = \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_1^2}{x_n + x_1}$.

3.
 $2S = S + \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_1^2}{x_n + x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2 + x_1^2}{x_n + x_1}$. De la parte

1, sabemos que $\frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i + x_j} \geq \frac{x_i + x_j}{2}$, lo que implica $2S \geq \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \dots + \frac{x_n + x_1}{2} \Leftrightarrow$

$2S \geq \frac{x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_n + x_1}{2} \Leftrightarrow 2S \geq \frac{1}{2} 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \Leftrightarrow 2S \geq$

$\frac{1}{2} 2 \Leftrightarrow S \geq \frac{1}{2}$

Problema 1.2.3. Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{(x+3)(x+2)}{(x-1)} \geq 0$
2. $\frac{(x+1)}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x}$
3. $|x - |x+2|| < 2x+3$

Solución:

Recordemos que $|x| < a \Leftrightarrow -a < x \wedge x < a$ y $|x| > a \Leftrightarrow -a > x \vee a < x$.

1. $\frac{(x+3)(x+2)}{(x-1)} \geq 0$ puntos criticos $\{-3, -2, 1\}$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x+3$	-	+	+	+
$x+2$	-	-	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$\frac{(x+3)(x+2)}{(x-1)}$	-	+	-	+

$$S = [-3, -2] \cup (1, \infty)$$

2. $\frac{(x+1)}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{2x-4}{x(x-1)} \leq 0$ puntos criticos $\{0, 1, 2\}$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$2x-4$	-	-	-	+
x	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$\frac{(x+1)}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x}$	-	+	-	+

$$S = (-\infty, 0) \cup (1, 2]$$

3.

$|x - |x+2|| < 2x+3 \Leftrightarrow 3x+3 > |x+2| \wedge -(x+3) < |x+2|$. Debemos resolver 2 inecuaciones e intersectar las soluciones obtenidas.

(1) $3x+3 > |x+2|$, (2) $-(x+3) < |x+2|$

(1) $3x+3 > |x+2| \Leftrightarrow -3(x+1) < x+2 \wedge x+2 < 3(x+1)$.

Nuevamente debemos resolver 2 inecuaciones. (1.1) $-3(x+1) < x+2$, (1.2) $x+2 < 3(x+1)$.

(1.1) $-3(x+1) < x+2 \Rightarrow 4x > -5 \Rightarrow x > \frac{-5}{4}$.

(1.2) $x+2 < 3(x+1) \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$.

$$S_1 = S_{1,1} \cap S_{1,2} = \left(\frac{-1}{2}, \infty\right).$$

(2) $-(x+3) < |x+2| \Leftrightarrow x+2 > -(x+3) \vee x+2 < x+3$.

Resolvemos las 2 inecuaciones. (2.1) $x + 2 > -(x + 3) \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$.

(2.2) $x + 2 < x + 3 \Rightarrow 2 < 3$.

$$S_2 = S_{2,1} \cup S_{2,2} = (\frac{-1}{2}, \infty) \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

$$\text{Luego, } S = S_1 \cap S_2 = (\frac{-1}{2}, \infty).$$

1.3. Auxiliar 3

Problema 1.3.1. Encuentre el conjunto solución de:

1. $x^3 - 11x^2 + 10x < 0$
2. $x^3 - 12x^2 + 3x > 0$
3. $|(x-1)(x-2)| \leq x$

Solución:

1. $x(x-1)(x-10) < 0$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 10)$	$(10, \infty)$
x	-	+	+	+
$(x-10)$	-	-	-	+
$(x-1)$	-	-	+	+
$x(x-10)(x-1)$	-	+	-	+

$$S = (-\infty, 0) \cup (1, 10)$$

2. $x(x - (6 - \sqrt{33}))(x - (6 + \sqrt{33})) > 0$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6 - \sqrt{33})$	$(6 - \sqrt{33}, 6 + \sqrt{33})$	$(6 + \sqrt{33}, \infty)$
x	-	+	+	+
$(x - (6 + \sqrt{33}))$	-	-	+	+
$(x - (6 - \sqrt{33}))$	-	-	-	+
$x(x - (6 - \sqrt{33}))(x - (6 + \sqrt{33}))$	-	+	-	+

$$S = (0, 6 - \sqrt{33}) \cup (6 + \sqrt{33}, \infty)$$

3. $|(x-1)(x-2)| \leq x \iff (x-1)(x-2) \leq x \wedge (x-1)(x-2) \geq -x$
 $(x-1)(x-2) \leq x \iff x^2 - 4x + 2 \leq 0 \iff (x - (2 - \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2})) \leq 0$:

	$(-\infty, 2 - \sqrt{2})$	$(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$	$(2 + \sqrt{2}, \infty)$
$(x - (2 - \sqrt{2}))$	-	+	+
$(x - (2 + \sqrt{2}))$	-	-	+
$(x - (2 - \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2}))$	+	-	+

$$S_1 = [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$$

$$(x-1)(x-2) \geq -x \iff x^2 - 2x + 2 \geq 0 \iff (x-1)^2 + 1 \geq 0$$

$$S_2 = \mathbb{R}$$

$$\text{Luego, } S = S_1 \cap S_2 = [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}].$$

Problema 1.3.2. Demuestre que si $A \neq \emptyset$ es un conjunto acotado superiormente entonces $-A = \{-x : x \in A\}$ es acotado inferiormente y $\sup(A) = -\inf(-A)$.

Solución:

Como $A \neq \emptyset$ y es acotado superiormente, el axioma del supremo nos asegura que existe $\sup(A)$ (mismo argumento para $\inf(-A)$ una vez demostrado que es acotado inf.). Por contradicción. Supongamos $-A$ no acotado inferiormente, es decir, $\forall N \in \mathbb{R} \exists y \in -A, y < N$. Sea $N = -M$, con M cota superior de A . Para cierto $y \in -A$, obtenemos $y < N$, pero $y = -y, y \in A$, luego, $y > -N \Leftrightarrow y > M$, lo cual contradice la hipótesis.

Verifiquemos $\sup(A) = -\inf(-A)$. Sea $s = \sup(A)$ e $i = \inf(-A)$. Sabemos que $\forall x \in A, s \geq x \Leftrightarrow \forall x \in A, -s \leq -x \Leftrightarrow \forall y \in -A, -s \leq y$, luego, $-s$ es cota inferior de $-A$. Como i es la mayor cota inferior, $-s \leq i$. Inversamente, sabemos que $\forall y \in -A, i \leq y \Leftrightarrow \forall y \in -A, -i \geq -y \Leftrightarrow \forall x \in A, -i \geq x$, es decir, $-i$ es cota superior de A , pero como s es la menor cota superior, $s \leq -i$. Luego $s \geq -i \wedge s \leq -i \Leftrightarrow s = -i$.

Problema 1.3.3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Pruebe que:

1. Existen $\sup(A)$ e $\inf(B)$
2. $\sup(A) \leq \inf(B)$

Solución:

1.

$(\exists b_0 \in B)(\forall a \in A)a \leq b_0$. Luego, A es acotado superiormente, entonces $\exists \sup(A)$.

$(\exists a_0 \in A)(\forall b \in B)a_0 \leq b$. Luego, B es acotado inferiormente, entonces $\exists \inf(B)$.

2.

Supongamos que $\inf(B) < \sup(A)$. Sabemos que $(\forall \epsilon > 0)(\exists b_0 \in B)\inf(B) + \epsilon > b_0$. Como $\sup(A) - \inf(B) > 0$ tomemos $\epsilon_0 = \frac{\sup(A) - \inf(B)}{3}$, luego, $b_0 < \frac{3\inf(B)}{3} + \frac{\sup(A) - \inf(B)}{3}$. Con esto, tenemos que $b_0 < \frac{2\inf(B)}{3} + \frac{\sup(A)}{3} + \sup(A) - \frac{3\sup(A)}{3} = \frac{2\inf(B)}{3} - \frac{2\sup(A)}{3} + \sup(A) = -2(\frac{\sup(A) - \inf(B)}{3}) + \sup(A) < \sup(A) - \frac{\sup(A) - \inf(B)}{3}$.

De la definición de supremo, sabemos que $(\forall \epsilon > 0)(\exists a_0 \in A)\sup(A) - \epsilon < a_0$, y tomando $\epsilon = \epsilon_0$, es decir, $\sup(A) - \epsilon_0 < a_0$, obtenemos la desigualdad $b_0 < a_0$, lo cual es una contradicción, pues $(\forall a \in A)(\forall b \in B)a \leq b$.

Problema 1.3.4. Sea $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^+$ no vacío y acotado superiormente. Pruebe que:

1. $\sup(cA) = c\sup(A)$, con $cA = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A, x = ca\}$
2. $\sup(b + A) = b + \sup(A)$, con $b + A = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A, x = b + a\}$

3. $\sup(A^2) = \sup^2(A)$, con $A^2 = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A, x = a^2\}$

Solución:

1.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad x &\leq \sup(A) \\ c \cdot x &\leq c \cdot \sup(A) \\ \sup(c \cdot A) &\leq c \cdot \sup(A) \end{aligned} \quad / c > 0$$

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad c \cdot x &\leq \sup(c \cdot A) \\ x &\leq c^{-1} \sup(c \cdot A) \\ \sup(A) &\leq c^{-1} \sup(c \cdot A) \\ c \cdot \sup(A) &\leq \sup(c \cdot A) \end{aligned}$$

Luego, $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A)$.

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad x &\leq \sup(A) \\ b + x &\leq b + \sup(A) \\ \sup(b + A) &\leq b + \sup(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad b + x &\leq \sup(b + A) \\ x &\leq \sup(b + A) - b \\ \sup(A) &\leq \sup(b + A) - b \\ b + \sup(A) &\leq \sup(b + A) \end{aligned}$$

Luego, $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

3.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad x &\leq \sup(A) \\ x^2 &\leq \sup^2(A) \\ \sup(A^2) &\leq \sup^2(A) \end{aligned}$$

Supongamos $\sup^2(A) > \sup(A^2)$. Sabemos que $(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in A)y > \sup(A) - \epsilon$, lo que implica que $y^2 > \sup^2(A) - 2\epsilon \sup(A) + \epsilon^2$. Como $\epsilon^2 > 0$ y $\sup^2(A) - 2\epsilon \sup(A) + \epsilon^2 > \sup^2(A) - 2\epsilon \sup(A)$, nos queda $y^2 > \sup^2(A) - 2\epsilon \sup(A)$. Tomando $\epsilon_0 = \frac{\sup^2(A) - \sup(A^2)}{2\sup(A)}$, con $\sup(A) > 0$, obtenemos $y^2 > \sup(A^2)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\sup^2(A) \leq \sup(A^2)$.

Concluimos que $\sup(A^2) = \sup^2(A)$.

1.4. Auxiliar 4

Problema 1.4.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\forall \epsilon > 0, a \leq b + \epsilon \Leftrightarrow a \leq b$.

Solucion:

(\Leftarrow)

Como $a \leq b \leq b + \epsilon$, pues $\epsilon > 0$ se tiene $a \leq b + \epsilon$.

(\Rightarrow)

Tenemos que $\forall \epsilon > 0, a \leq b + \epsilon$. Probemos entonces que $a \leq b$.

$a \leq b + \epsilon \Leftrightarrow (a - b) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0 \Rightarrow a - b \leq 0 \Rightarrow a \leq b$.

Problema 1.4.2. Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen $\forall b \in \mathbb{R}, b > 1$ entonces $x < by$, se tiene $x \leq y$.

Solución:

Por contradiccion. Supongamos que $x > y$. Luego $x - y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n(x - y) > 1 \Rightarrow (x - y) > \frac{1}{n} \Rightarrow x > y + \frac{1}{n}$. Escojamos $b = 1 + \frac{1}{ny} (y > 0)$. Ademas $x < by$ entonces

$by > x > y + \frac{1}{n} \Rightarrow 0 > 0$.

Ahora, si $y \leq 0$

$y = 0 \Rightarrow x < by \Rightarrow x \leq 0 = y \Rightarrow x \leq y$

Sea $y < 0 \Rightarrow x < by \Rightarrow x < 0 (by < 0)$. Luego $x < 0 \wedge y < 0$, pero $x < by \Leftrightarrow \frac{x}{y} > b (y < 0)$

(valido paa todo $b > 1$). Asi, $\frac{x}{y}$ es cota superior de $A = \{b \in \mathbb{R} : b > 1\}$, lo cual es una contraiccion, pues A es no acotado superiormente.

Por lo tanto, $x \leq y$, con $x, y \geq 0$.

Problema 1.4.3. Analice maximo, minimo, supremo e infimo de:

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{[x]} < a\}, a > 1$ fijo.

2. $B = \{x \in \mathbb{R} : [x]x \leq -x\}$

Solución:

1.

Claramente $[0, 1)$ no esta contenido en A , pues $\forall x \in [0, 1), [x] = 0$.

Como $x \in \mathbb{R}^+, [x] > 0$. Luego, $x \in A \Rightarrow \frac{1}{[x]} < a \Leftrightarrow \frac{1}{a} < [x]$. Como $[x] > 1$ si $x \geq 1$ y ademas

$\frac{1}{a} < 1$ pues $a > 1$ entonces $\frac{1}{a} < 1 < [x], \forall x \geq 1$. Luego $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.

$\sup(A)$, $\max(A)$ no existen. $\inf(A) = \min(A) = 1$.

2.

$x \in B \Leftrightarrow [x]x \leq -x \Leftrightarrow x([x] + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x \leq 0 \wedge ([x] + 1) \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge ([x] + 1) \leq 0)$

(1): $x \leq 0 \wedge ([x] + 1) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 0]$.

(2): $(x \geq 0 \wedge ([x] + 1) \leq 0) \Rightarrow x \geq 0 \wedge x \leq -1$, lo cual es imposible.

$S = S_1 \cup S_2 = [-1, 0] \cup \emptyset = [-1, 0]$.

$$\sup(B) = \text{máx}(B) = 0. \quad \inf(B) = \text{mín}(B) = -1.$$

Problema 1.4.4 (SERA RESUELTO EN CLASE AUXILIAR 5). Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} . Densidad de \mathbb{I} en \mathbb{R} .

1.5. Auxiliar 5

Problema 1.5.1. Probar que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$

Solucion:

Supongamos que $\sqrt{2}$ se puede escribir de la forma $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Podemos suponer que si p es par, entonces q es impar, pues si ambos son pares, se descomponen hasta que uno sea par y el otro impar, ó que ambos son impares (primos relativos, ie, no tienen divisores en común). Tenemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

, luego

$$p^2 = 2q^2$$

lo que indica que p es par, por lo tanto q es impar. Sean $q = 2m + 1$, $p = 2n$, con $n, m \in \mathbb{N}$. Con esto nos queda que

$$4n^2 = 2q^2$$

pero esto equivale a

$$q^2 = 2n^2$$

, lo cual contradice el hecho de que q es impar.

Problema 1.5.2. Probar que:

1. \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .
2. \mathbb{I} es denso en \mathbb{R} .
3. \mathbb{Q} es denso en \mathbb{I} .
4. \mathbb{I} es denso en \mathbb{Q} .

Solución:

La definición de que A sea denso en B es equivalente a decir que $\forall x, y \in B$, con $x < y$, existe $z \in A$ tal que $x < z < y$.

1.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $a < b$. Por la propiedad Arquimediana, sabemos que $\forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$, $nx > 1$, lo cual es equivalente a decir que $\forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$, $n > -x$ (pues $nx > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{x} > 0 > -x$). Con esto $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m > -a$, luego $0 < m + a < m + b$. Como $b - a > 0$, la propiedad Arquimediana nos asegura que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Con esto tenemos que

$$1 < n(b - a) = n(b + m) - n(a + m) \quad (1)$$

la propiedad Arquimediana nuevamente nos asegura que $\exists l \in \mathbb{N}$ tal que $l > n(a + m)$ (basta tomar $\frac{1}{n(a + m)}$ en la propiedad). Sea l_0 el menor entero que cumple con $l_0 > n(a + m)$, luego $l_0 - 1 \leq n(a + m)$ ($l_0 = [n(a + m)] + 1$). Entonces, utilizando (1),

$$l_0 \leq n(a + m) + 1 < n(b + m)$$

nos queda

$$n(a + m) < l_0 < n(b + m)$$

por lo tanto $a < \frac{l_0 - mn}{n} < b$, con $\frac{l_0 - mn}{n} \in \mathbb{Q}$.¹

2.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $a < b$. Sabemos que $\sqrt{2} > 0$ y su recíproco también, ie, $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Con esto, $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Por la parte 1, sabemos que existe un racional $\frac{k}{n}$ tal que $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{k}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $k \neq 0$ (revisar). Luego $a < \frac{k\sqrt{2}}{n} < b$. Si $\frac{k\sqrt{2}}{n}$

fuera racional, existirían $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$ tales que $\frac{k\sqrt{2}}{n} = \frac{r}{s}$, pero con esto obtenemos que $\sqrt{2} = \frac{rn}{ks} \in \mathbb{Q}$, pero por el problema 1 sabemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, luego, se cumple la proposición.²

3.

Trivial, pues $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

4.

Trivial, pues $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Problema 1.5.3. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z}, |x - n| < \epsilon\}$. Demuestre que $A = \mathbb{Z}$.
Sea $B = \{x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, |x - \frac{p}{q}| < \epsilon\}$. Demuestre que $B = \mathbb{Q}$.

Solución:

Para la primera parte, hay que probar que $A \subseteq \mathbb{Z} \wedge A \supseteq \mathbb{Z}$.

$A \supseteq \mathbb{Z}$:

Sea $x \in \mathbb{Z}$. Claramente se cumple $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z}, |x - n| < \epsilon$, pues $n = x$.

$A \subseteq \mathbb{Z}$:

Sea $x \in A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z}, |x - n| < \epsilon$. Supongamos $x \notin \mathbb{Z}$, es decir, $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \vee x \in \mathbb{I}$. Si

$x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \notin \{0, 1\}$, por esto, sabemos que $\left[\frac{p}{q}\right] < \frac{p}{q} < \left[\frac{p}{q}\right] + 1$, luego, $\exists M, N > 0$

tales que $M = \left|\left[\frac{p}{q}\right] - \frac{p}{q}\right| \wedge N = \left|\left[\frac{p}{q}\right] + 1 - \frac{p}{q}\right|$. Por lo tanto, la distancia mínima a cualquier

¹www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Ganong/1000/density.pdf FACT 1

²www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Ganong/1000/density.pdf FACT 2

entero sera mayor o igual a $P = \min\{M, N\}$ (hacer dibujo). Luego, tomando $0 < \epsilon < P$ se obtiene la contradiccion. El caso $x \in \mathbb{I}$ es analogo.

Por lo tanto $A = \mathbb{Z}$.

La segunda parte es similar.

Problema 1.5.4. Sean $M = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, $N = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ tales que $\forall x \in A \exists y \in B, x \leq N \wedge \forall y \in B \exists x \in A, y \geq M$

1.6. Auxiliar 6

Problema 1.6.1. Demuestre por inducción que $n^3 + 3n^2 + 2n$ es divisible por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Caso base: $n = 1$

$1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$, luego, es divisible por 3.

Caso general: $n \Rightarrow n + 1$

Supongamos $n^3 + 3n^2 + 2n$ es divisible por 3, es decir, $n^3 + 3n^2 + 2n = 3K$, para algun $K \in \mathbb{Z}$. Veamos que $(n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 + 2(n + 1)$ es divisible por 3.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + 2(n + 1) \\&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 \\&= (n^3 + 3n^2 + 2n) + 6 + 3n^2 + 9n \\&= 3K + 3(n^2 + 3n + 2) \\&= 3K + 3M\end{aligned}$$

por lo tanto, $(n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 + 2(n + 1) = 3(K + M)$, luego, es divisible por 3.

Problema 1.6.2. Demuestre que $\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$, para $A \subset \mathbb{R}^+$, $A \neq \emptyset$, acotado superiormente ($\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$).

Solución:

Como $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente, por el axioma del supremo, existe $\sup A$, es decir, $\forall x \in A, x \leq \sup A \Leftrightarrow \forall x \in A, \sqrt{x} \leq \sqrt{\sup A}$ (pues $\sqrt{\cdot}$ es creciente y preserva la desigualdad para numeros positivos).

Con esto, \sqrt{A} esta acotado superiormente por $\sqrt{\sup A}$, pero como $\sup \sqrt{A}$ es la menor cota superior, se tiene $\sup \sqrt{A} \leq \sqrt{\sup A}$.

Ahora, sabemos que $\sqrt{x} \leq \sup \sqrt{A} \Leftrightarrow x \leq (\sup \sqrt{A})^2$ (pues $(\cdot)^2$ es creciente y preserva la desigualdad para numeros positivos). Como $\sup A$ es la menor cota superior de A , tenemos que $\sup A \leq (\sup \sqrt{A})^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sup A} \leq \sup \sqrt{A}$.

1.7. Auxiliar 7

Recuerdo 1. .

1. Se define la circunferencia $C \subset \mathbb{R}^2$ de radio $r > 0$ y centro $P \in \mathbb{R}^2$ como el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $d((x, y), P) = r$, con $d((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$ (distancia entre (x, y) y (u, v)).
2. Se define la recta $L \subset \mathbb{R}^2$ como el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen con $d((x, y), P) = d((x, y), Q)$, con $P, Q \in \mathbb{R}^2, P \neq Q$ (es decir, los puntos que estan a igual distancia de los puntos P y Q).
3. Una recta L se puede caracterizar por $L : ax + by + c = 0$, $L : y = mx + n$ o $L : (y - y_0) = m(x - x_0)$ con $(x_0, y_0) \in L$.
4. La distancia de un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una recta L de ecuacion $ax + by + c = 0$ esta dada por la ecuacion $d(P, L) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
5. Se define una parabola P como el conjunto de punto que equidistan de un foco $F = (\alpha, \beta)$ y una directriz de ecuacion $y = q$, es decir, son los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $d((x, y), (\alpha, \beta)) = e \cdot d((x, y), D)$, con $e = 1$ (excentricidad).

Problema 1.7.1. Sean dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan respectivamente por 2 puntos fijos A y B del eje OX, y se cortan perpendicularmente en el punto P. Determine el lugar geometrico de P.

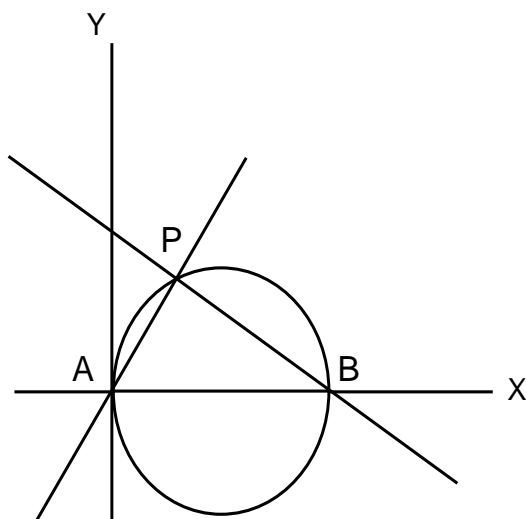


Figura 1.1: Representacion del problema (1.7.1).

Solución:

Sin perdida de generalidad, $B = (2b, 0)$. Tenemos que $L_1 : y = mx$ y $L_2 : y = \frac{-1}{m}(x - 2b)$. Sea $P = (x_p, y_p)$:

$$\begin{aligned} y_p &= mx_p \quad (1) \\ y_p &= \frac{-1}{m}(x_p - 2b) \quad (2) \end{aligned}$$

Encontremos el lugar geometrico:

De (1), $m = \frac{y_p}{x_p}$. De (2), $y_p = \frac{-x_p}{y_p}(x_p - 2b)$, o equivalentemente, $y_p^2 = -x_p^2 + 2bx_p$. Sumando y restando b^2 obtenemos $y_p^2 + (x_p - b)^2 = b^2$.

Por lo tanto, el lugar geometrico es una circunferencia de radio b y centro $(b, 0)$, menos los puntos A y B.

Problema 1.7.2. Considere la circunferencia $C : x^2 + y^2 = r^2$ y su punto superior es $A = (0, r)$. Por un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de C se traza la recta AP que corta al eje OX en Q . Determine el lugar geometrico de la interseccion de la recta QP con la vertical que pasa por Q .

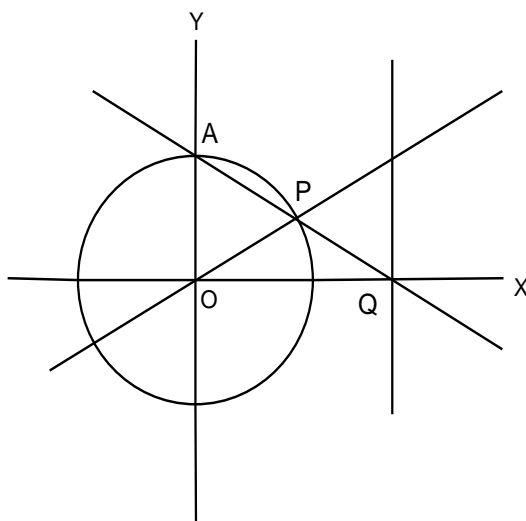


Figura 1.2: representacion del problema (1.7.2)

Solución:

Sabemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \quad (1) \\ y - r &= \frac{y_0 - r}{x_0}x \quad (2) \\ y &= \frac{y_p}{x_p}x \quad (3) \end{aligned}$$

Sea $Q = (x_q, 0)$ el punto de intersección de la recta AP y el eje OX , por lo tanto cumple la ecuación

$$0 - r = \frac{y_0 - r}{x_0} x_q$$

, luego $x_q = \frac{rx_0}{r - y_0}$.

La ecuación de la recta vertical en Q tiene ecuación $x = x_q$, es decir, $x = \frac{rx_0}{r - y_0}$.

Sea $I = (x_i, y_i)$ el punto de intersección de la recta OP y la recta vertical por Q , por lo tanto cumple las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{rx_0}{r - y_0} \\ y_i &= \frac{y_0}{x_0} x_i \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$rx_0 + x_i y_0 = rx_i \quad (1)$$

$$x_0 y_i - y_0 x_i = 0 \quad (2)$$

(1)+(2):

$$\begin{aligned} rx_0 + x_0 y_i &= rx_i \\ x_0 &= \frac{rx_i}{r + y_i} \\ y_0 &= \frac{ry_i}{r + y_i} \end{aligned}$$

Como se cumple $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{rx_i}{r + y_i}\right)^2 + \left(\frac{ry_i}{r + y_i}\right)^2 &= r^2 \\ x_i^2 + y_i^2 &= (r + y_i)^2 \end{aligned}$$

Luego, el lugar geométrico está dado por la ecuación

$$x^2 + y^2 = (r + y)^2.$$

Problema 1.7.3. Considere la recta $L : y = mx + n$ y el punto $A = (a, 0)$ donde m, n, a son constantes positivas. Sea Q el punto medio del trazo OA y sean N y M los puntos donde L intersecta el eje OY y la recta vertical por A , respectivamente. Sea L_1 la recta perpendicular al trazo QN que pasa por el origen y sea L_2 la recta perpendicular a QM que pasa por A , si P es la intersección de L_1 y L_2 , demostrar que la recta QP es perpendicular con L .

Solución:

Sean $Q = (\frac{a}{2}, 0)$, $N = (0, n)$, $M = (a, ma + n)$. Calculando las pendientes, tenemos que $m_{QN} = \frac{-2n}{a}$, lo que implica que $m_{L_1} = \frac{a}{2n}$, y $m_{QM} = \frac{2(ma + n)}{a}$ lo que implica $m_{L_2} = \frac{-a}{2(ma + n)}$.

Tenemos que:

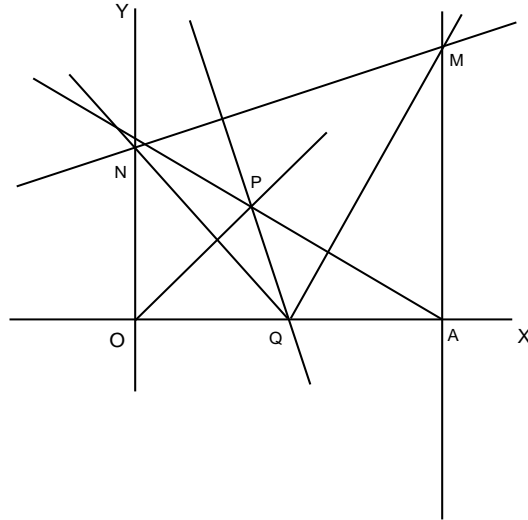


Figura 1.3: Representacion del problema (1.7.3)

$$L_1 : y = \frac{a}{2n}x$$

$$L_2 : y = \frac{-a}{2(ma+n)}(x-a)$$

Intersectando ambas rectas, obtenemos que $P = (x_p, y_p) = (\frac{na}{ma+2n}, \frac{a^2}{2(ma+2n)})$. La pendiente de la recta QP es $m_{QP} = \frac{y_p}{x_p - \frac{a}{2}}$, de lo cual se obtiene $m_{QP} = \frac{-1}{m}$.

Problema 1.7.4. Sea $P_{a,b,c}$ la parabola de ecuacion $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos, y $L_{m,n}$ la recta de ecuacion $y = mx + n$. Determine las condiciones sobre los parametros m y n para que la recta sea tangente a la parabola.

Solucion:

Procedimiento:

- Intersectar la recta y la parabola.
- Determinar los valores de las x's (pueden ser los valores de las y's).
- Imponer unicidad.

Intersectamos las ecuaciones:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

$$y = mx + n \quad (2)$$

Restando (1) y (2) obtenemos

$$0 = ax^2 + (b - m)x + (c - n)$$

las soluciones de esta ecuacion de 2º grado son:

$$x_{1,2} = \frac{(m - b) \pm \sqrt{(b - m)^2 - 4a(c - n)}}{2a}$$

imponiendo unicidad, el discriminante de esta ecuacion debe ser 0, es decir,

$$(b - m)^2 = 4a(c - n)$$

Graficamente, este procedimiento representa la eleccion de un conjunto de rectas en particular, dada una parabola fija. Veamos un ejemplo en el proximo problema.

Problema 1.7.5. Dada una parabola de ecuacion $y = 4x^2 + 10$, encuentre las ecuaciones de las recta tangentes a ella.

Solucion:

Utilizamos el problema anterior, es decir, la pendiente y el coef. de posicion de las rectas tangentes deben cumplir con $(0 - m)^2 = 16(10 - n) \Leftrightarrow m^2 = 160 - 16n \Leftrightarrow \frac{160 - m^2}{16} = n$. Luego, obtenemos la siguiente tabla para algunos valores enteros:

m	-3	-2	-1	0	1	2	3
n	$\frac{151}{16}$	$\frac{156}{16}$	$\frac{159}{16}$	10	$\frac{159}{16}$	$\frac{156}{16}$	$\frac{151}{16}$

Verifiquemos que la interseccion de alguna de estas rectas con la parabola es efectivamente un unico punto. Utilizemos $m = 0, n = 10$ y $m = 2, n = \frac{156}{16}$.

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 + 10 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

La solucion de este sistema es $(x_0, y_0) = (0, 10)$, luego, $y = 10$ es tangente la parabola.

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 + 10 \\ y &= 2x + \frac{156}{16} \end{aligned}$$

La solucion de este sistema es $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{41}{4})$, luego, $y = 2x + \frac{156}{16}$ es tangente la parabola.

Problema 1.7.6. Sean $P_{a,0,c}$ una parabola y $C_{R,(0,t)}$ una circunferencia de centro $(0, t)$ y radio $R > 0$. Determine el valor de t y R necesarios para que la recta que pasa por los puntos de interseccion de la parabola y la circunferencia (deben ser solo 2) sea paralela al eje OX y pasa por el punto $(0, 10)$, suponiendo que $a > 0$ y $c < 10$.

Solucion:

Queremos intersectar la parabola con un circulo en 2 puntos de forma que ambos tengan la misma coordenada en el eje OY , para ello intersectemos la recta y la circunferencia:

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + c \\ x^2 + (y - t)^2 &= R^2\end{aligned}$$

ponderando por a en la segunda ecuacion y sumando obtenemos la ecuacion de 2° grado para las y 's:

$$y + a(y - t)^2 = c + aR^2 \Leftrightarrow ay^2 + (1 - 2at)y + (at^2 - aR^2 - c) = 0$$

las soluciones de esta ecuacion son:

$$y_{1,2} = \frac{2at - 1 \pm \sqrt{(1 - 2at)^2 - 4a(at^2 - aR^2 - c)}}{2a}$$

imponiendo unicidad, obtenemos una condicion sobre t y R :

$$(1 - 2at)^2 = 4a(at^2 - aR^2 - c) \quad (*)$$

Con esto, tenemos el valor de $y_0 = \frac{2at - 1}{2a}$ que debe ser igual a 10, luego podemos obtener el valor de t :

$$10 = \frac{2at - 1}{2a} \Leftrightarrow 20a + 1 = 2at \Leftrightarrow \frac{20a + 1}{2a} = t$$

reemplazando en $(*)$, obtenemos el valor de R

$$(1 - 2a\frac{20a + 1}{2a})^2 = 4a(a(\frac{20a + 1}{2a})^2 - aR^2 - c)$$

Por lo tanto, los valores de t y R en funcion de a, c son:

$$t = \frac{20a + 1}{2a}, R = \frac{1}{2a} \sqrt{a(\frac{20a + 1}{2a})^2 - (1 - 2a\frac{20a + 1}{2a})^2 - c}$$

Se debe mencionar tambien que $a(\frac{20a + 1}{2a})^2 - (1 - 2a\frac{20a + 1}{2a})^2 - c$ debe ser mayor o igual a 0, de lo contrario, no existe un radio R que pueda cumplir con la condicion $(*)$.

1.8. Auxiliar 8

Recuerdo 2. .

1. La distancia de un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una recta L de ecuación $ax + by + c = 0$ está dada por la ecuación $d(P, L) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
2. Se define una elipse E como el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $d((x, y), (\alpha, \beta)) = e \cdot d((x, y), D)$, con $e < 1$, $F = (\alpha, \beta)$ y directriz $D : x = q$.
3. Se define una hipérbola H como el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $d((x, y), (\alpha, \beta)) = e \cdot d((x, y), D)$, con $e > 1$, $F = (\alpha, \beta)$ y directriz $D : x = q$ (H tiene 2 focos y 2 directrices).

Problema 1.8.1. Sea $t \geq 0$. Analice a que corresponde la expresión

$$(1 - t)x^2 - ty^2 = t(t - 1), \forall t \geq 0.$$

Solución:

Veamos los casos:

1. $t = 0 \Rightarrow x = 0$, **recta vertical**.
2. $t = 1 \Rightarrow -y^2 = 0$, **recta horizontal**.
3. $t \in (0, 1) \Rightarrow (1 - t) > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{t} - \frac{y^2}{1 - t} = 1$, **hiperbola**.
4. $t > 1 \Rightarrow 1 - t < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{t - 1} = 1$, **elipse**.

Problema 1.8.2. Determine el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que pasan por algún vértice de una elipse.

Solución:

Consideremos $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sea $P \in E$, $P = (\alpha, \beta) \Rightarrow \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$. Sea $A = (-a, 0)$.

El punto medio del segmento \overline{AP} es $M = \frac{A + P}{2} = (\frac{-a + \alpha}{2}, \frac{\beta}{2})$, luego, los puntos medios (x, y) cumplen con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha - a}{2} \\ y &= \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

lo que implica: $2x + a = \alpha \wedge 2y = \beta$ y reemplazando en la ecuación de la elipse, obtenemos:

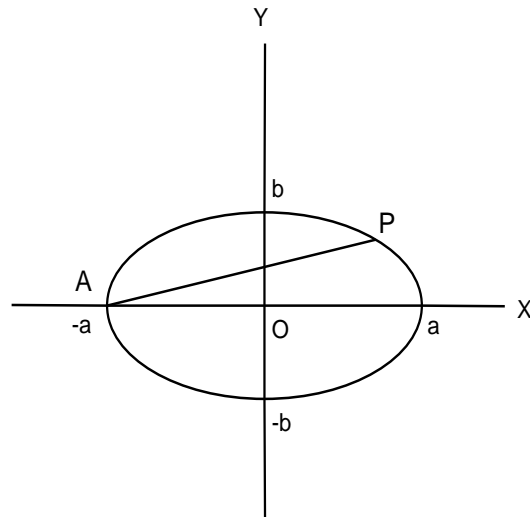


Figura 1.4: Lugar geometrico del problema (1.8.2)

$$\frac{(2x + a)^2}{a^2} + \frac{(2y)^2}{b^2} = 1$$

lo que corresponde a una elipse desplazada y cuyos valores a y b han cambiado.

Problema 1.8.3. Demuestre que toda circunferencia cuyo centro pertenece a la hipérbola $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ y que es tangente al eje OY, corta al eje OX en una cuerda de longitud constante. Determine esa constante.

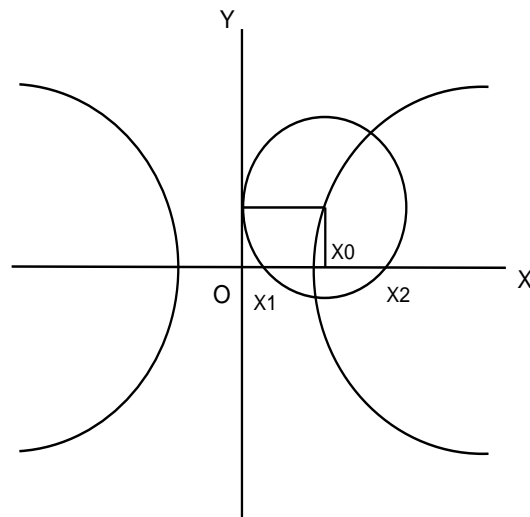


Figura 1.5: Representacion del problema (1.8.3)

Escribamos la ecuación de la circunferencia de centro $(x_0, y_0) \in H$. El radio de la circunferencia es x_0 , considerando $x_0 > 0$ (ver figura 2).

La circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2$ tiene como puntos de intersección con el eje OY a $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ (siempre serán 2 puntos) (¿por qué?). Como buscamos la intersección con el eje OY, intersectamos con la recta $y = 0$, luego $(x - x_0)^2 + y_0^2 = x_0^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 = a^2$, pues como $H : x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow x_0^2 - y_0^2 = a^2$. Por lo tanto $(x - x_0)^2 = a^2 \Rightarrow |x - x_0| = a \Rightarrow x_0 - x_1 = a \wedge x_2 - x_0 = a \Rightarrow x_1 = x_0 - a \wedge x_2 = x_0 + a \Rightarrow |x_1 - x_2| = |x_0 - a - x_0 - a| = |-2a| = 2a$. Con esto, la constante tiene el valor $2a$.

Problema 1.8.4. Determinar el lugar geométrico de los puntos medios del segmento \overline{VQ} donde Q es un punto cualquiera de la hipérbola $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $V = (-a, 0)$ es un vértice fijo.

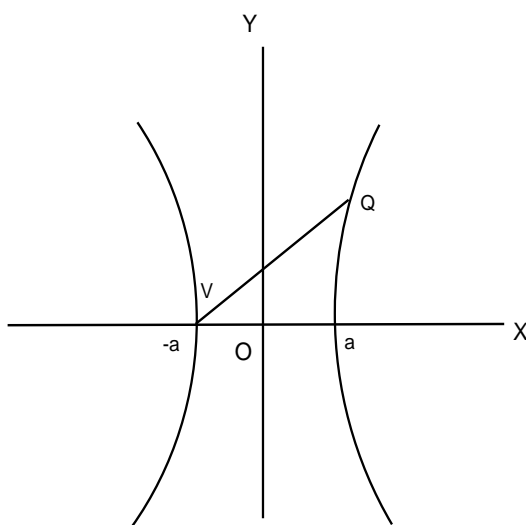


Figura 1.6: Lugar geométrico del problema (1.8.4)

Solución:

Sea $Q = (x_q, y_q) \in H$, con $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, satisface $\frac{x_q^2}{a^2} - \frac{y_q^2}{b^2} = 1$. Como $V = (-a, 0)$, entonces el punto medio de \overline{VQ} es $M = \frac{V + Q}{2} = (\frac{x_q - a}{2}, \frac{y_q}{2})$. Los puntos medios (x, y) del trazo \overline{VQ} satisfacen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_q - a}{2} \\ y &= \frac{y_q}{2} \end{aligned}$$

lo que implica $x_q = 2x + a \wedge y_q = 2y$ y reemplazando (x_q, y_q) en la hipérbola, obtenemos la ecuación

$$\frac{(2x+a)^2}{a^2} - \frac{(2y)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$$

Por lo tanto el lugar geometrico que satisfacen los punto medios de los trazos \overline{VQ} es una hiperbola desplazada y cuyos valores de a y b han cambiado. (parecido a problema 2).

1.9. Auxiliar 9

Problema 1.9.1. Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x^2 - 9x + 18 + |x - 5|}{x^3 - 5x^2 + 6x - |x|} < 0$$

Solución:

Dos opciones:

$$\begin{aligned} & [(x^2 - 9x + 18 + |x - 5| > 0) \wedge (x^3 - 5x^2 + 6x - |x| < 0)] \\ & \vee \\ & [(x^2 - 9x + 18 + |x - 5| < 0) \wedge (x^3 - 5x^2 + 6x - |x| > 0)] \\ & \Leftrightarrow \\ & [p(x) \wedge q(x)] \vee [p'(x) \wedge q'(x)] \\ p(x) & \Leftrightarrow |x - 5| > (-x + 6)(x - 3) \Leftrightarrow x - 5 > (-x + 6)(x - 3) \vee x - 5 < (-x + 6)(x - 3) \Leftrightarrow \\ & 0 < x^2 - 8x + 13 \vee 0 < x^2 - 10x + 23 \Leftrightarrow 0 < (x - x_1)(x - x_2) \vee 0 < (x - x_3)(x - x_4), \text{ donde} \\ x_{1,2} & = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 13}}{2}, x_{3,4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 23}}{2}. \\ q(x) & \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x < |x| \Leftrightarrow x > x^3 - 5x^2 + 6x \vee x < -x^3 + 5x^2 - 6x \Leftrightarrow 0 > x^3 - 5x^2 + 5x \vee 0 > \\ & x^3 - 5x^2 + 7x \Leftrightarrow 0 > x(x - x_5)(x - x_6) \vee 0 > x(x - x_7)(x - x_8), \text{ donde } x_{5,6} \text{ son las soluciones} \\ & \text{de } x^2 - 5x + 5 \text{ y } x_{7,8} \text{ soluciones de } x^2 - 5x + 7. \text{ Se repite el proceso para } p'(x) \text{ y } q'(x). \text{ El} \\ & \text{algoritmo general se puede representar de la siguiente forma}^3: \end{aligned}$$

```
// Puede ser A(x)<0 o A(x)>0, da lo mismo el signo, se multiplica por -1, idem para mayor igual o menor igual
{
Proposición A(x)<0;
Solución S=vacio;
evaluar(A(x)<0 , S);
imprimir S;
}
Solución evaluar(p(x)<0 , S){
  if(p(x)<0 es de la forma r(x)/q(x)<0, con q(x) distinto de cero)
    S=[ evaluar(r(x)<0) INTERSECCION evaluar(q(x)>0) ] UNION [ evaluar(r(x)>0) INTERSECCION evaluar(q(x)<0) ];
  if(p(x)<0 contiene una expresión con modulo){
    if(p(x)<0 se puede escribir de la forma r(x)<|q(x)|)
      S=evaluar(r(x)<q(x)) UNION evaluar(-r(x)>q(x)) ;
    if(p(x)<0 se puede escribir de la forma r(x)>|q(x)|)
      S=evaluar(r(x)>q(x)) INTERSECCION evaluar(-r(x)<q(x));
  }
  else
    realizar tabla con puntos criticos y obtener S;
  return S;
}
```

Problema 1.9.2. Sea $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hipérbola y un punto $P = (x_p, y_p)$ cualquiera en ella. Considere el triángulo formado al intersectar las asíntotas de H con la tangente a H que pasa por P. Demuestre que el área de ese triángulo es igual a ab .

Solución:

³El algoritmo utiliza RECURSION, materia que se ve mas adelante en CC10A.

Las asintotas de una hipérbola son de la forma $y - \beta = \frac{b}{a}(x - \gamma)$ y $y - \beta = -\frac{b}{a}(x - \gamma)$ donde $\gamma = \frac{\alpha - e^2 q}{1 - e^2}$, $a = \frac{e|q - \alpha|}{e^2 - 1}$ y $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, en la ecuación $\frac{(x - \gamma)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$.

Por lo tanto las asintotas en este problema son de la forma $y = \frac{b}{a}x$ (1) y $y = -\frac{b}{a}x$ (2).

La ecuación de la recta que corta a la cónica $C : Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ en el punto $P = (\alpha, \beta) \in C$ es

$$y = -\frac{2\alpha A + C}{2\beta B + D}(x - \alpha) + \beta$$

luego, reemplazando (α, β) por (x_p, y_p) , y $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{-1}{b^2}$, $C = 0$, $D = 0$ y $E = -1$, nos queda

$$y = \frac{b^2 x_p}{a^2 y_p}(x - x_p) + y_p \quad (3)$$

Intersectemos las 3 rectas:

(1) y (2):

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x \end{aligned}$$

nos queda el punto $R = (0, 0)$.

(1) y (3):

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x \\ y &= \frac{b^2 x_p}{a^2 y_p}(x - x_p) + y_p \end{aligned}$$

nos queda el punto S .

(1) y (3):

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b}{a}x \\ y &= \frac{b^2 x_p}{a^2 y_p}(x - x_p) + y_p \end{aligned}$$

nos queda el punto T .

Con estas 3 coordenadas, podemos calcular la altura del triángulo (intersectando un segmento con una recta ortogonal que pase por el punto opuesto y obteniendo la distancia desde esa intersección al punto) y utilizando la fórmula $A_{\text{triángulo}} = \frac{bh}{2}$.

Tambien se puede utilizar la forma del determinante⁴:

$$\text{Area Triangulo RST} = \begin{vmatrix} R_x & R_y & 1 \\ S_x & S_y & 1 \\ T_x & T_y & 1 \end{vmatrix}$$

Problema 1.9.3. Sean $f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones inyectivas. Se define $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) + g(x)$ y $cf : X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow cf(x)$.

1. ¿Para que valores de c , cf es inyectiva?
2. Muestre que $f + g$ no tiene porque ser necesariamente inyectiva.

Solucion:

1. cf inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, (cf)(x_1) = (cf)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Pero dados $x_1, x_2 \in X, (cf)(x_1) = (cf)(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para $c \neq 0$. Como f es inyectiva, $x_1 = x_2$ y cf es inyectiva. Si $c = 0$, se tiene que $0f(x_1) = 0f(x_2) \Leftrightarrow 0 = 0$, de lo cual no sabemos si $f(x_1) = f(x_2)$, luego, cf no es inyectiva.

Luego, $\forall c \neq 0, cf$ es inyectiva.

2. Si $f + g$ es una funcion constante, no es inyectiva. Tenemos que $f(x) = x, g(x) = 1 - x$ ambas inyectivas, pero $(f + g)(x) = x + 1 - x = 1$ no es inyectiva.

Problema 1.9.4. Una funcion f se dice estrictamente creciente si $(\forall x, y \in Dom(f)) x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Pruebe que si f es est. creciente, entonces f es inyectiva.

Solucion:

Notemos que una funcion es estrictamente creciente si y solo si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \vee f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$.

P.D.Q. $(\forall x_1, x_2 \in Dom(f)) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \geq x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

⁴Aporte de alumno

1.10. Auxiliar Extra 1

Problema 1.10.1. Demuestre que $\inf(A) = a$, con $A = (a, \infty)$.

Solucion:

Claramente a es cota inferior de $A = (a, \infty)$. Veamos que es la mayor cota inferior. Por contradiccion. Supongamos que $\exists c \in \mathbb{R}, c > a$ tal que $c = \inf(A)$. Esto implica que c es la mayor cota inferior. Como $c > a \Rightarrow c - a > 0$. Tomemos $\epsilon = c - a$. Entonces $a + \frac{\epsilon}{2} > a \Rightarrow a + \frac{\epsilon}{2} \in A \Rightarrow c < a + \frac{\epsilon}{2}$, pues c es cota inferior de A , entonces $c < a + \frac{c-a}{2} \Rightarrow c < \frac{c+a}{2} \Rightarrow 2c < c+a \Rightarrow c < a$, lo cual es una contradiccion. Por lo tanto $a = \inf(A)$.

Problema 1.10.2. Sea $A = \{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\inf(A) = 0$

Solucion:

Recordemos que $\frac{1}{2n+1} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq 0$. Si c es cota inferior de A , se tiene $c \leq \frac{1}{2n+1} \leq 1 \Rightarrow c \leq 1$. Supongamos que $\inf(A) = c > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, c \leq \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 2n+1 \leq \frac{1}{c} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2c}(\frac{1}{c} - 1)$, pero $\frac{1}{2c}(\frac{1}{c} - 1) < 0$, luego, $n < 0$, lo cual es una contradiccion. Por lo tanto ninguna cota inferior sera mayor que cero, por lo tanto, la mayor cota inferior es 0, es decir, $\inf(A) = 0$.

Problema 1.10.3. Sea $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2 \wedge \frac{nx^2 - 4}{|x| - 2} \geq 1\}$. Calcular $S_n = \sup(A_n)$ y $S = \inf\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Solucion:

Veamos qué elementos pertenecen a A_n : Si $x \in A_n \Leftrightarrow |x| \leq 2 \wedge \frac{nx^2 - 4}{|x| - 2} \geq 1$ (necesariamente $x \neq 2$). La segunda condicion dice que $nx^2 - 2 - |x| \leq 0$ (*).

Si $x \geq 0$: $|x| = x \Rightarrow nx^2 - 2 - x \leq 0$. Las raices de la ecuacion son $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8n}}{2n} \Rightarrow nx^2 - 2 - x = (x - x_1)(x - x_2) \leq 0$. Haciendo la tabla, tenemos:

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$(x - x_1)$	-	-	+
$(x - x_2)$	-	+	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	-	+

luego $x \in [\frac{1 - \sqrt{1+8n}}{2n}, \frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n}]$, pero como estamos en el caso $x \geq 0$, $x \in [0, \frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n}]$,
y $\sup(A_n) = \frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n}$.

Si $x \leq 0$: Análogo al caso anterior, el resultado es $\sup(A_n) = \frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n}$.

Por lo tanto $\sup(A_n) = \frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n}$.

Calculemos $\inf\{\frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Separando terminos tenemos que $\frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}(\sqrt{1+8n})$, luego, $\inf\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \inf\{\frac{1}{2n}\} + \inf\{\frac{1}{2n}\} \inf\{\sqrt{1+8n}\}$, y como $\inf\{\frac{1}{2n}\} = 0$ y $\inf\{\sqrt{1+8n}\} = 3$, con $n \geq 1$, tenemos que $\inf\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 0 + 0 \cdot 3 = 0$.

Problema 1.10.4. Determine (si los hay) máx, mín, ínf, sup de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \geq 0\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 5\}$.
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+4}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}\}$.
4. $D = (A \cap B) \cup C$.

Solucion:

1.

$$x(x - 4) \geq 0:$$

	$(-\infty, 0)$ $(0, 4)$ $(4, \infty)$		
x	—	—	+
$(x - 4)$	—	+	+
$x(x - 4)$	+	—	+

$S = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$. Luego no existen máx, mín, ínf ni sup

2.

$|x - 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 1 \wedge x - 1 < 5 \Leftrightarrow x > -4 \wedge x < 6 \Leftrightarrow x \in (-4, 6)$. $S = (-4, 6)$, no tiene máximo ni mínimo, $\sup(-4, 6) = 6$, $\inf(-4, 6) = -4$.

3.

$x \in C \Leftrightarrow x = 6$. Luego, $\max C = \min C = \inf C = \sup C = 6$.

4.

$D = (-4, 0] \cup [4, 6]$. Luego, $\max D = \sup D = 6$, $\inf D = -4$ y no existe el mínimo.

1.11. Pauta Ejercicio 1

Problema 1.11.1. Pruebe que:

1. Si $b, c, d \neq 0$ se tiene $ab^{-1}(cd^{-1})^{-1} = ad(bc)^{-1}$ (Indique los axiomas y propiedades que utilice).
2. Si $x \neq y \neq z, x, y, z \in \mathbb{R}^+$ y $x + y + z = 6$ se tiene $x^2 + y^2 + z^2 > 12$.
3. Si $a \neq b \neq c, a, b, c \in \mathbb{R}^+$ se tiene $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} > 6$.

Solucion:

$$\begin{aligned}
 1. \quad ab^{-1}(cd^{-1})^{-1} &= ab^{-1}(d^{-1})^{-1}c^{-1} / (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\
 &= ab^{-1}dc^{-1} / (x^{-1})^{-1} = x \\
 &= adb^{-1}c^{-1} / \text{conmutatividad} \\
 &= ad(cb)^{-1} / (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\
 &= ad(bc)^{-1} / \text{conmutatividad}
 \end{aligned}$$

2.

Como $x \neq y \neq z$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &> 2xy \\
 x^2 + z^2 &> 2xz \\
 y^2 + z^2 &> 2yz
 \end{aligned}$$

,sumando las 3 desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 &> 2xy + 2xz + 2yz && /+(x^2 + y^2 + z^2) \\
 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\
 3(x^2 + y^2 + z^2) &> (x + y + z)^2 \\
 3(x^2 + y^2 + z^2) &> 36 \\
 x^2 + y^2 + z^2 &> 12
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} &= \frac{(a+b)ab + (b+c)cb + (a+c)ac}{abc} \\
 &= \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2}{abc} \\
 &= \frac{b(a^2 + c^2) + a(b^2 + c^2) + c(a^2 + b^2)}{abc}
 \end{aligned}$$

, como $a \neq b \neq c$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &> 2ab \\
 a^2 + c^2 &> 2ac \\
 b^2 + c^2 &> 2bc
 \end{aligned}$$

, luego,

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} > \frac{2abc + 2abc + 2abc}{abc} > 6$$

Problema 1.11.2. Sea $\alpha > 0$.

1. Deduzca la expresion $\max\{x, y\}$ en base a $|y - x|$. **HINT:** recuerde que la expresion $|y - x|$ se refiere a la distancia entre ambos numeros, luego, si $x \geq y \Rightarrow |y - x| = x - y$ y si $x \leq y \Rightarrow |y - x| = y - x$.
2. Encuentre el conjunto solucion de la inecuacion

$$\max\{x, \alpha\} - \frac{\alpha}{2} > 0$$

3. Encuentre el conjunto solucion de la inecuacion

$$x - |x - |x - 1|| < 0$$

4. Pruebe que si $A \neq \emptyset$ esta acotado superiormente por α , entonces $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A$ tal que $|x - \min\{\sup(A), \alpha\}| < \epsilon$.

Solucion:

1.
$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |y - x|)$$

2. La solucion es trivial, pues $\forall x \in \mathbb{R}, \max\{x, \alpha\} \geq \alpha > \frac{\alpha}{2}$, luego $S = \mathbb{R}$.

Paso a paso: $\max\{x, \alpha\} - \frac{\alpha}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + \alpha + |\alpha - x|) - \frac{\alpha}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{|\alpha - x|}{2} > 0 \Leftrightarrow x + |\alpha - x| > 0 \Leftrightarrow |\alpha - x| > -x \Leftrightarrow (\alpha - x > -x) \vee (\alpha - x < -x) \Leftrightarrow (\alpha > 0) \vee (\frac{\alpha}{2} < x)$. Luego, $S = \mathbb{R} \cup (\frac{\alpha}{2}, \infty) = \mathbb{R}$.

3.
$$|x - |x - 1|| > x \Leftrightarrow (x - |x - 1| > x) \vee (x - |x - 1| < -x) \Leftrightarrow (|x - 1| < 0) \vee (2x < |x - 1|) \Leftrightarrow (|x - 1| < 0) \vee [(x - 1 > 2x) \vee (x - 1 < -2x)] \Leftrightarrow (|x - 1| < 0) \vee [(-1 > x) \vee (\frac{1}{3} > x)]$$
. Luego
$$S = \emptyset \cup (-\infty, -1) \cup (-\infty, \frac{1}{3}) = (-\infty, \frac{1}{3})$$
.

4. Por axioma del supremo, sabemos que existe $\sup(A)$, la menor cota superior de A , luego $\min\{\sup(A), \alpha\} = \sup(A)$. Por contradiccion. Supongamos $\exists \epsilon > 0 \forall x \in A, |x - \min\{\sup(A), \alpha\}| \geq \epsilon \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \forall x \in A, |x - \sup(A)| \geq \epsilon$. Claramente esto es una contradiccion pues basta tomar $S = \sup(A) - \frac{\inf\{|x - \sup(A)| : x \in A\}}{2}$ para tener una cota superior menor que el supremo.

Problema 1.11.3. Sea $L : y = m_0x + n$, con $0 < m_0 < \infty$ fijo y la hipérbola H de foco $F = (1, 2)$ y directriz $D : x = 2$. La excentricidad de la parábola es $e = \sqrt{5}$.

1. Encuentre la ecuación de H . **HINT:** recuerde que $(x, y) \in H \Leftrightarrow d((x, y), F) = ed((x, y), D)$, donde $d((x, y), D) = |x - 2|$. [Opcional]

2. Si la hipérbola es de ecuación $H : \left(\frac{x - \frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} \right)^2 - \left(\frac{y - 2}{\frac{1}{2}} \right)^2 = 1$. Determine la condición que debe cumplir n en la recta L para que sea tangente a H .

Solución:

1.

Siguiendo el hint, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 d((x, y), F) &= ed((x, y), D) \\
 &\Leftrightarrow \\
 \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} &= e|x-2| \\
 &\Leftrightarrow \\
 (x-1)^2 + (y-2)^2 &= e^2(x-2)^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 x^2 - 2x + 1 + (y-2)^2 &= x^2e^2 - 4e^2x + 4e^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 (1-e^2)x^2 + x(4e^2 - 2) + (y-2)^2 &= 4e^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 x^2 + 2x\left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right) + \frac{(y-2)^2}{1 - e^2} &= \frac{4e^2}{1 - e^2} \\
 &\Leftrightarrow \\
 x^2 + 2x\left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right) + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{(y-2)^2}{1 - e^2} &= \frac{4e^2}{1 - e^2} + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \left(x - \frac{1 - 2e^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{(y-2)^2}{1 - e^2} &= \frac{4e^2}{1 - e^2} + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \frac{\left(x - \frac{1 - 2e^2}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{4e^2}{1 - e^2} + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2} - \frac{(y-2)^2}{(e^2 - 1)\left(\frac{4e^2}{1 - e^2} + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2\right)} &= 1 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \left(\frac{x - \frac{1 - 2e^2}{1 - e^2}}{\sqrt{\frac{4e^2}{1 - e^2} + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2}} \right)^2 - \left(\frac{y - 2}{\sqrt{(e^2 - 1)\left(\frac{4e^2}{1 - e^2} + \left(\frac{2e^2 - 1}{1 - e^2}\right)^2\right)}} \right)^2 &= 1
 \end{aligned}$$

reemplazando $e = \sqrt{5}$, obtenemos la ecuacion $\left(\frac{x - \frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(\frac{y - 2}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1$.

2.

Intersectemos L y H :

$$\begin{matrix} y = m_0x + n & (1) \\ \left(\frac{x - \frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(\frac{y - 2}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 & (2) \end{matrix}$$

restando 2, dividiendo por $\frac{1}{2}$, elevando a 2 y sumando (2) y (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x - \frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}\right)^2 &= \left(\frac{m_0x + n - 2}{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \\ 4\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 &= (m_0x + n - 2)^2 \end{aligned}$$

de aca obtenemos la ecuacion de 2º grado:

$$\begin{aligned} 4\left(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) &= m_0^2\left(x^2 + 2x\frac{n-2}{m_0} + \frac{(n-2)^2}{m_0^2}\right) \\ (4 - m_0^2)x^2 + (-18 - 2m_0(n-2))x + \left(\frac{81}{4} - (n-2)^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

las soluciones son $x_{1,2} = \frac{18 + 2m_0(n-2) \pm \sqrt{(18 + 2m_0(n-2))^2 - 4(4 - m_0^2)\left(\frac{81}{4} - (n-2)^2\right)}}{2(4 - m_0^2)}$.

Por lo tanto la condicion de n para que la recta sea tangente a la hiperbola es :

$$(18 + 2m_0(n-2))^2 - 4(4 - m_0^2)\left(\frac{81}{4} - (n-2)^2\right) = 0$$

Capítulo 2

Auxiliares para el Control 2

2.1. Auxiliar 11

Problema 2.1.1. Determine dominio, $Z(f)$, $pos(f)$, $neg(f)$, recorrido, paridad, crecimiento, inyectividad, periodicidad y acotamiento de las siguientes asignaciones:

1. $f(x) = \frac{x+1}{1-|x|}$
2. $f(x) = (x^4 - 4)\sqrt{1-x^2}$

Solución:

1.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Z(f) = ϕ .

pos(f) = $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.

neg(f) = $[(-\infty, -1) \cap (-1, 1)] \cup [(-1, \infty) \cap \mathbb{R} - [-1, 1]] = (1, \infty)$.

Recorrido: Sea $x \in (-\infty, -1)$, el valor de $y = f(x)$ es $\frac{x+1}{1+x} = 1$. Para $x \in (-1, 0]$, el valor de $y = f(x)$ es 1. Para $x \in [0, 1)$, el valor de y es $\frac{x+1}{1-x}$ que concuerda con el intervalo $[1, \infty)$. Para $x \in (1, \infty)$, los valores de y están en $(-\infty, -1)$. Luego, el recorrido es $\{1\} \cup [1, \infty) \cup (-\infty, -1) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1)$.

Paridad: Como $x+1$ no es par ni impar y $\frac{1}{1-|x|}$ es par, la función no es par ni impar.

Imparidad: Mismo argumento.

Crecimiento: En $(-\infty, -1)$, la función es constante, pues si $x < 0$, $-|x| = x$, luego $f(x) = \frac{x+1}{1+x} = 1$. Veamos el tramo $(-1, 0]$. Como $x \leq 0$, se tiene que $f(x) = \frac{x+1}{1+x} = 1$.

En el tramo $[0, 1)$, se tiene que $-|x| = -x$, luego $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$, si tomamos $x < y$ con $x, y \in [0, 1)$, tenemos que $x < y \Leftrightarrow 2x+1 < 2y+1 \Leftrightarrow x+1-xy-y < y+1-xy-x \Leftrightarrow (x+1)(1-y) < (y+1)(1-x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} < \frac{y+1}{1-y}$, luego es est. creciente. Para el tramo

$(1, \infty)$ el razonamiento es analogo, por lo tanto es est. creciente en $(1, \infty)$.

Por lo tanto $f(x)$ es constante en $(-\infty, -1)$, constante en $(-1, 0]$, est. creciente en $[0, 1)$ y est. creciente en $(1, \infty)$.

Inyectividad: De lo anterior se tiene que $f(x)$ es no inyectiva en $(-\infty, -1)$, no inyectiva en $(-1, 0]$, inyectiva en $[0, 1)$ e inyectiva en $(1, \infty)$.

Periodicidad: No es periodica pues es constante en un tramo.

Acotamiento: No es acotada pues si x se acerca a 1 o -1 , el valor de $f(x)$ se dispara.

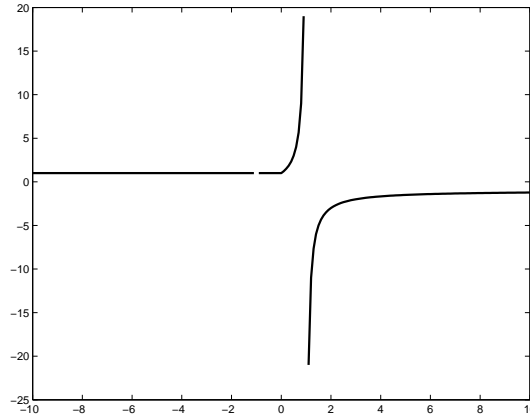


Figura 2.1: Función $f(x) = \frac{x+1}{1-|x|}$.

2.

Dominio: $[-1, 1]$.

Z(f) = $\{-1, 1\}$.

pos(f) = \emptyset .

neg(f) = $(-1, 1)$.

Recorrido: Como no se indefin en $[-1, 1]$ basta ver que en este intervalo se tiene $-4 \leq x^4 - 4 \leq -3 \wedge 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow -4\sqrt{1-x^2} \leq (x^4-4)\sqrt{1-x^2} \leq -3\sqrt{1-x^2} \wedge -4\sqrt{1-x^2} \geq -4 \wedge -3\sqrt{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow -4 \leq (x^4-4)\sqrt{1-x^2} \leq 0$. Luego el recorrido es $[-4, 0]$

Paridad: Sabemos que $x^4 - 4$ es par al igual que $\sqrt{1-x^2}$, por ser composicion de $\sqrt{\cdot}$ con una funcion par, luego $f(x)$ es par por ser multiplicacion de funciones pares.

Crecimiento: En $[-1, 0]$, (x^4-4) es est. decreciente, sean $x, y \in [-1, 0]$, $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2 \Leftrightarrow 1-x^2 < 1-y^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-y^2}$, luego $x < y \Leftrightarrow x^4 > y^4 \Leftrightarrow x^4-4 > y^4-4 \Leftrightarrow 4-x^4 < 4-y^4 \Leftrightarrow (4-x^4)\sqrt{1-y^2} < (4-y^4)\sqrt{1-y^2} \Rightarrow (4-x^4)\sqrt{1-x^2} < (4-y^4)\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow f(x) > f(y)$. Analogamente, en $[0, 1]$ es est. creciente, sean $x, y \in [0, 1]$, $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow 1-x^2 > 1-y^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-y^2}$, luego $x < y \Leftrightarrow x^4 < y^4 \Leftrightarrow x^4-4 < y^4-4 \Leftrightarrow 4-x^4 > 4-y^4 \Leftrightarrow (4-x^4)\sqrt{1-y^2} > (4-y^4)\sqrt{1-y^2} \Rightarrow (4-x^4)\sqrt{1-x^2} > (4-y^4)\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Inyectividad: En $[-1, 0]$ es inyectiva al igual que en $[0, 1]$, pero no en $[-1, 1]$.

Periodicidad: No es periodica.

Acotamiento: Tiene como cota superior 0 y como cota inferior -4 .

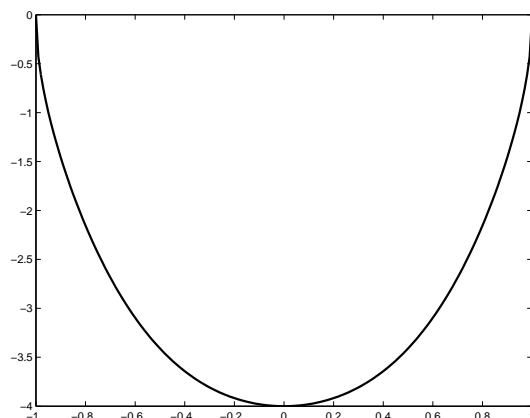


Figura 2.2: Función $f(x) = (x^4 - 4)\sqrt{1 - x^2}$.

Problema 2.1.2. Demostrar que no existen funciones f y g con alguna de las propiedades siguientes:

1. $f(x) + g(y) = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $f(x)g(y) = x + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Solución:

1.

Evaluemos en $x = 0$: $\forall y \in \mathbb{R}, f(0) + g(y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, g(y) = -f(0)$, es decir, g es constante. Sin embargo, evaluando en $x = 1$: $\forall y \in \mathbb{R}, f(1) + g(y) = y \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, g(y) = y - f(1)$, lo que implica que $\forall y \in \mathbb{R}, -f(0) = y - f(1) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, y = f(1) - f(0)$ lo cual es una contradicción, pues si tomo $y_0 \neq y_1 \Leftrightarrow f(1) - f(0) \neq f(1) - f(0) \Rightarrow 0 \neq 0$.

2.

Evaluemos en $x = 0$: $\forall y \in \mathbb{R}, f(0)g(y) = y$. Si $f(0) = 0$ obtenemos una contradicción, pues $\forall y \in \mathbb{R}, y = 0 \Rightarrow 1 = 0$. Luego, supongamos $f(0) \neq 0$, es decir, $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \frac{y}{f(0)}$. Ahora evaluemos en $x = 1$: $\forall y \in \mathbb{R}, f(1)g(y) = 1 + y$. Si $f(1) = 0$ obtenemos una contradicción, pues $\forall y \in \mathbb{R}, -1 = y \Rightarrow 0 = -1$. Supongamos $f(1) \neq 0$, nos queda $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \frac{1 + y}{f(1)}$, por

lo tanto $\forall y \in \mathbb{R}, \frac{y}{f(0)} = \frac{1 + y}{f(1)} \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, f(1)y = f(0)y + f(0) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, (f(1) - f(0))y = f(0)$. Si $f(1) = f(0)$ se produce una contradicción pues $\forall y \in \mathbb{R}, y = 1 + y \Rightarrow 0 = 1$, luego $f(1) - f(0) \neq 0$. Finalmente nos queda $\forall y \in \mathbb{R}, y = \frac{f(0)}{f(1) - f(0)}$, lo que es una contradicción.

Problema 2.1.3. Suponga que una función f satisface $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$. Demuestre que $f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$. Demuestre que existe un real c tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Solución:

La primera parte es trivial. Notemos que $f(1) = f(1 + 0) = f(1) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ y $f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) \Rightarrow -f(1) = f(-1)$. Veamos que existe un c que cumple con $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = cx$. Veamos el caso $x \in \mathbb{Z}$: claramente $x = \sum_{i \in I} 1 + \sum_{j \in J} -1$ para algun $I = \{1, \dots, n\}, J = \{1, \dots, m\}$ conjuntos de indices, luego $f(x) = \sum_{i \in I} f(1) - \sum_{j \in J} f(1) = nf(1) - mf(1) = (n - m)f(1) = f(1)x$. Para los reciprocos, sea $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$: $f(1) = f(\frac{n}{n}) = f(\frac{1 + \dots + 1}{n}) = \sum_{i \in N} f(\frac{1}{n})$, con $N = \{1, \dots, n\}$, luego $f(1) = nf(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = f(1)\frac{1}{n}$. Con esto se obtiene el resultado para todo racional y $c = f(1)$.

Apéndice 1 (GRÁFICOS EN MATLAB). Para graficar una funcion polinomial o racional (que incluya modulo o cajón en ella) en **MATLAB**, se procede de la siguiente forma. Sean $p(x), q(x)$ polinomios ($q(x) \neq 0$) y $u \in \mathbb{R}$. Grafiquemos en el intervalo $[-100, 100]$ con espaciado de 1, es decir, se graficaran los puntos $-100, -99, \dots, -1, 0, 1, \dots, 99, 100$:

1. Si $f(x) = u$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, u * ones(1,[tamaño de x]))
```

2. Si $f(x) = p(x)$, con $p(x) = ux^n + vx^{n-1} + \dots + wx + t$, con $v, w, \dots, t \in \mathbb{R}$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, u * x.^n + v * x.^(n-1) + ... + w * x + t * ones(1,[tamaño de x]))
```

3. Si $f(x) = p(x) \cdot q(x)$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, p(x).*q(x))
```

4. Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, p(x) ./ q(x))
```

5. Si $f(x) = [p(x)]$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, floor(p(x)))
```

6. Si $f(x) = |p(x)|$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, abs(p(x)))
```

7. Si $f(x) = \sqrt{p(x)}$:

```
>> x=[-100:1:100]
>> plot(x, sqrt(p(x)))
```

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 4x - 7}$, con $x \in [-20, 20]$ con espaciado de 0,5.

```
>> x=[-20:0.5:20]
>> plot(x, (x.^2-2*x+3*ones(1,81))./(2*x.^2-4*x-7*ones(1,81)))
```

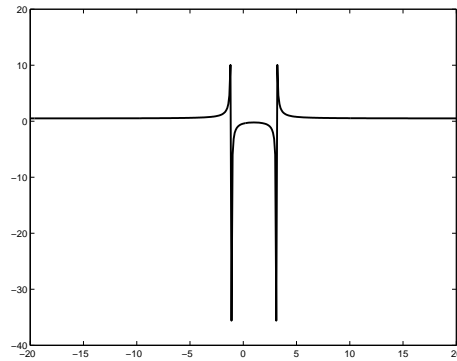


Figura 2.3: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 4x - 7}$

2. $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{|x|}$, con $x \in [-50, 50]$ con espaciado de 0,1.

```
>> x=[-50:0.1:50]
>> plot(x, (x.^3).*(sqrt(abs(x))))
```

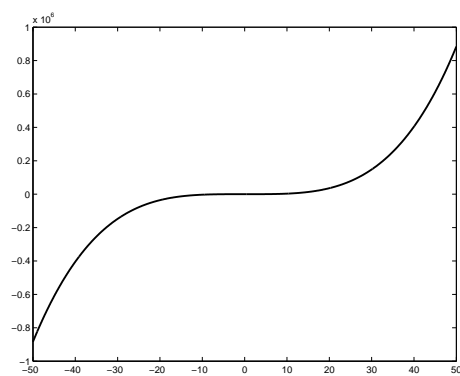


Figura 2.4: $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{|x|}$

2.2. Auxiliar 12

Problema 2.2.1. Demuestre que

1. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
2. $\cos u + \cos v = 2 \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) \cos \left(\frac{u+v}{2} \right)$
3. $\cos u - \cos v = -2 \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right)$

Solución 2.2.1. 1.

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin \alpha + \beta}{\cos \alpha + \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}$$

2. Sabemos que $u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}$ y $v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \cos u &= \cos \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \right) \\
 &= \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) - \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right) \\
 \cos v &= \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) + \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{por lo tanto, } \cos u + \cos v = 2 \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) \cos \left(\frac{u+v}{2} \right).$$

3. De la parte anterior, restando $\cos u$ y $\cos v$ se obtiene el resultado.

Problema 2.2.2. Sea $u_n = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha$.

Pruebe que $u_n \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(n\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$.

Solución 2.2.2. $u_n \sin \frac{\alpha}{2} = \sum_{k=1}^n \sin k\alpha \sin \frac{\alpha}{2}$. Como $\cos u - \cos v = -2 \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right)$, sean $\frac{u+v}{2} = k\alpha$ y $\frac{u-v}{2} = \frac{\alpha}{2}$, con lo cual $u = k\alpha + \frac{\alpha}{2}$ y $v = k\alpha - \frac{\alpha}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{-2} \sum_{k=1}^n -2 \sin k\alpha \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{-2} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(k\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left(k\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha \right) \end{aligned}$$

lo cual es una suma telescópica, por lo tanto, $u_n \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(n\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$

Problema 2.2.3 (EN FOTOCOPIA).

2.3. Auxiliar 13

Problema 2.3.1. Demuestre que en todo triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β y γ respectivamente, se cumple que

$$b \cos(\gamma) - c \cos(\beta) = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

Solución:

Por el teorema del coseno, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{aligned}$$

restando ambas expresiones, obtenemos

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 &= c^2 - b^2 - 2ac \cos(\beta) + 2ab \cos(\gamma) \\ 2(b^2 - c^2) &= 2a(b \cos(\gamma) - c \cos(\beta)) \\ \frac{b^2 - c^2}{a} &= b \cos(\gamma) - c \cos(\beta) \end{aligned}$$

Problema 2.3.2. Un cohete de altura h se encuentra a M metros de distancia de un observador. El ángulo con respecto a la horizontal de la línea de visión del sujeto a la punta del cohete es de α radianes. Después de algunos segundos, el cohete ha despegado de manera vertical, manteniendo una trayectoria recta. El ángulo de la línea de visión del sujeto a la punta del cohete ha aumentado en Δ radianes. Encuentre la distancia que ha recorrido el cohete entre ambos instantes.

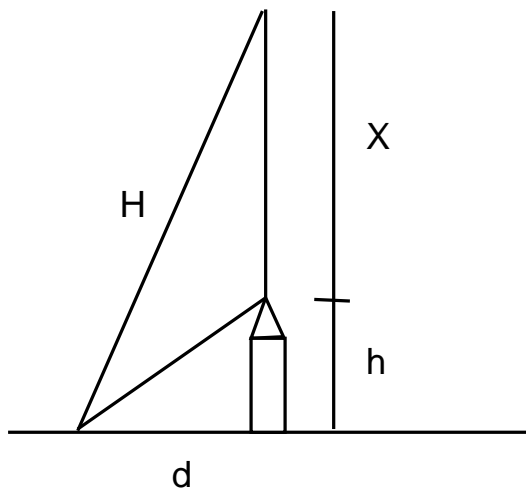


Figura 2.5: Cohete de altura h que se encuentra a M metros de distancia de un observador.

Solución:

Como se ve en la figura, se debe calcular la distancia X , pero para facilitar el calculo, consideremos $M = X + h$, por lo tanto $H^2 = M^2 + d^2$. Del terorema del coseno, tenemos que

$$\begin{aligned} M^2 &= d^2 + H^2 - 2dH \cos(\Delta + \alpha) \\ M^2 &= d^2 + d^2 + M^2 - 2d\sqrt{d^2 + M^2} \cos(\Delta + \alpha) \\ 0 &= 2d^2 + 0 - 2d\sqrt{d^2 + M^2} \cos(\Delta + \alpha) \\ d^2 &= d\sqrt{d^2 + M^2} \cos(\Delta + \alpha) \\ d &= \sqrt{d^2 + M^2} \cos(\Delta + \alpha) \\ d^2 &= (d^2 + M^2) \cos^2(\Delta + \alpha) \\ d^2(1 - \cos^2(\Delta + \alpha)) &= M^2 \cos^2(\Delta + \alpha) \\ d^2 \sin^2(\Delta + \alpha) &= M^2 \cos^2(\Delta + \alpha) \\ d \tan(\Delta + \alpha) &= M \end{aligned}$$

como $M = X + h$, tenemos que $X = d \tan(\Delta + \alpha) - h$.

Este resultado concuerda con la intuición ya que si el cohete se aleja demasiado, el angulo Δ tenderá a $\frac{\pi}{2} - \alpha$, por lo tanto $\tan(\Delta + \alpha) \rightarrow \infty$ (pues se acerca por la izquierda), lo que concuerda con lo esperado.

Problema 2.3.3. Sea $f_n(x) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n & 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ 0 & t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$ una función en \mathbb{R} :

1. Grafique f_n .
2. Encuentre su dominio, recorrido, paridad, crecimiento, $Z(f_n)$, $pos(f_n)$ y $neg(f_n)$.
3. Explique el comportamiento de f_n cuando $n \rightarrow \infty$.

Solución:

1.

La funciones f_n se grafican de la forma: , es decir, mientras mayor es n , $pos(f_n)$ es menor y $Z(f_n)$ aumenta.

2.

Su dominio es \mathbb{R} y su recorrido es $\{0\} \cup \{n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente no es par ni impar y tampoco es creciente ni decreciente. $Z(f_n) = \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{n}, \infty)$, $pos(f_n) = [0, \frac{1}{n})$ y $neg(f_n) = \emptyset$.

3.

Cuando $n \rightarrow \infty$, significa que n cada vez toma valores más grandes, por lo tanto $pos(f_n) = [0, \frac{1}{n})$ cada vez es mas pequeño, pues $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (se demostrara más adelante). Suponiendo que se puede alcanzar ∞ , el valor $\frac{1}{n}$ es igual a 0, por lo tanto $pos(f_\infty) = [0, 0) = \emptyset$. Como f_n toma el valor n en $pos(f_n)$, se debería tener que f_∞ tome el valor ∞ en $pos(f_\infty)$, pero como

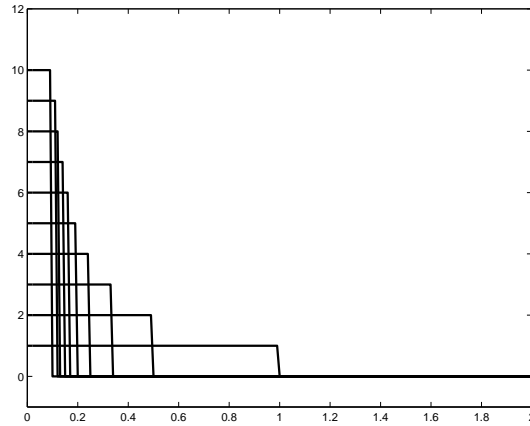


Figura 2.6: Graficos de f_n para distintos valores de n .

este conjunto es vacío, se tiene una contradicción, luego, nunca se puede alcanzar ∞ . Para resolver este problema, se opta por definir una nueva "función" llamada Delta de Dirac, $\delta(t)$ que cumple con $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$, lo cual no es una función, pues no puede tomar el valor ∞ , pues de hacerlo, estaríamos suponiendo que $\text{pos}(f_\infty) \neq \emptyset$. A esta expresión entonces se le llama distribución.

Problema 2.3.4 (P2 (b), C2 2001). En un triángulo ABC , con ángulos interiores α, β y γ respectivamente, se tiene la igualdad

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Demuestre que el triángulo es rectángulo.

Solución:

Se tienen las siguientes igualdades (demostradas en cátedra):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Reemplazando en la hipótesis, se obtiene :

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha)} \quad (*)$$

por el teorema del seno, tenemos que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

por lo tanto, (*) queda de la forma

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\frac{a}{b} \sin(\beta) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\frac{a}{b} \sin(\beta) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha)}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a \cos(\beta) + b \cos(\alpha)}{a \cos(\beta) - b \cos(\alpha)} \quad (**)$$

ahora, por el teorema del coseno, se tiene que:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta)$$

lo que implica que

$$\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} = b \cos(\alpha)$$

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = a \cos(\beta)$$

reemplazando en (**),

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{c^2}{a^2 - b^2}$$

por lo tanto $a^2 + b^2 = c^2$, con lo que se prueba que ABC es un triángulo rectángulo.

2.4. Auxiliar 14

Problema 2.4.1. Estudie dominio, paridad, crecimiento, ceros y período de $g(x) = \frac{x}{|x| - 2}$.
 ¿Es inyectiva?. Grafique.

Solución:

Dominio: Se indefine en $\{-2, 2\}$, luego $Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Paridad: $g(-x) = \frac{-x}{|-x| - 2} = -\frac{x}{|x| - 2} = -g(x)$, por lo tanto es impar.

Crecimiento: Como es impar, basta analizar solo para $x \geq 0$. Sean $x, y \in [0, \infty)$, $x < y$.

Veamos el valor de $g(x) - g(y) = \frac{x}{|x| - 2} - \frac{y}{|y| - 2} = \frac{x}{x - 2} - \frac{y}{y - 2} = \frac{x(y - 2) - y(x - 2)}{(x - 2)(y - 2)}$.

Si $x, y \in [0, 2)$, entonces $x - 2 < 0 \wedge y - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) > 0$ (ocurre lo mismo para $x, y \in (-2, 0]$, pero $x - 2 > 0 \wedge y - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) > 0$). Si $x, y \in (2, \infty)$, entonces $x - 2 > 0 \wedge y - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) > 0$ (igual para $x, y \in (-\infty, -2)$, pero $x - 2 < 0 \wedge y - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) > 0$). Veamos el comportamiento de $x(y - 2) - y(x - 2) = 2(y - x)$, como $x < y \Rightarrow y - x > 0$, se tiene que $g(x) > g(y)$, g es est. decreciente en $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$.

Ceros: $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Período: Veamos si $\exists T > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(x + T)$. Supongamos que si, es decir, $\frac{x}{|x| - 2} = \frac{x + T}{|x + T| - 2}$ para $x \geq 0$. desarrollando esa expresión, se tiene que $T = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto g no es periódica. Veamos si es inyectiva:

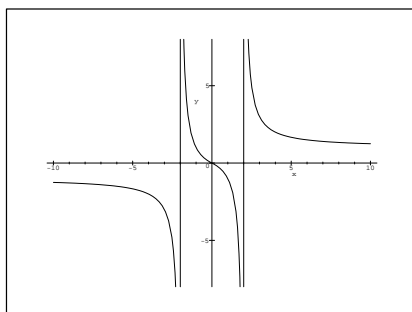


Figura 2.7: Gráfico de $g(x) = \frac{x}{|x| - 2}$.

Claramente no lo es, pues basta considerar $a \in Rec(g)$ tal que $a = \frac{x_1}{x_1 - 2}$ si $x_1 > 0$ y $a = \frac{x_2}{-x_2 - 2}$ si $x_2 < 0$, con esto se tiene que $x_1 = \frac{2a}{a - 1}$ y $x_2 = \frac{-2a}{1 + a}$, luego, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$, se tiene que $g(x_1) = g(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$, luego g no es inyectiva.

Problema 2.4.2 (EN FOTOCOPIADORA).

Problema 2.4.3. Expresar $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ en función de $\tan(\frac{x}{2})$.

Solución:

Recordemos que

$$\begin{aligned}\text{sen}(\alpha \pm \beta) &= \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \text{sen}(\beta) \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)\end{aligned}$$

Si tomamos $\alpha = \beta = \frac{x}{2}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) &= 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

como $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\text{sen}(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\text{sen}(x) &= 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2 \text{sen}(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})}{1} \\ &= \frac{2 \text{sen}(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})}{\text{sen}^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{\tan^2(\frac{x}{2}) + 1} \quad (\text{se multiplica por } \frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})})\end{aligned}$$

y como $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$, se tiene que $\cos(x) = \frac{\tan^2(\frac{x}{2}) - 1}{\tan^2(\frac{x}{2}) + 1}$.

2.5. Auxiliar 15

Problema 2.5.1. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$.

Solución:

La ecuación es equivalente a $\cos(x)(1 + \tan^2(x)) = 2 \tan(x) \Leftrightarrow \cos(x) + \cos(x) \tan^2(x) = 2 \tan(x)$ (*). Recordemos que $\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$, por lo tanto $\tan^2(x) = 1 - \frac{2 \tan(x)}{\tan(2x)}$.

Reemplazando en (*), se tiene que $\cos(x) + \cos(x) - \frac{2 \tan(x)}{\tan(2x)} = 2 \tan(x)$. Multiplicando a ambos lados por $\cos(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2(x) - \frac{2 \tan(x) \cos(x)}{\tan(2x)} &= 2 \tan(x) \\ 2 \cos^2(x) - \frac{\tan(2x)}{\tan(2x)} &= 2 \tan(x) \\ 2 \cos^2(x) - \cos(2x) &= 2 \tan(x) \\ 2 \cos^2(x) - 2 \cos^2(x) + 1 &= 2 \tan(x) \\ \frac{1}{2} &= \tan(x) \end{aligned}$$

con esto, el conjunto solución es $S = \{x : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Problema 2.5.2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos intervalos. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en A si y solo si $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

1. Pruebe que la función $d(x) = |x|$ es convexa.
2. Pruebe que si $\forall z \in B, \exists z_1, z_2 \in B$ tales que $\forall \lambda \in [0, 1], z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$, entonces $d(x, B) = \inf\{|x - z| : z \in B\}$ es convexa.

Solución:

1.

Sean $x, y \in A \subset \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$, con A un intervalo.

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= |\lambda x + (1 - \lambda)y| \\ &\leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| \\ &= |\lambda||x| + |1 - \lambda||y| \\ &= \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|, \text{ pues } \lambda \geq 0. \\ &= \lambda d(x) + (1 - \lambda)d(y) \end{aligned}$$

por lo tanto, $d(\cdot)$ es convexa.
2.

$$\begin{aligned}
 d(\lambda x + (1 - \lambda)y, B) &= \inf\{|\lambda x + (1 - \lambda)y| : z \in B\} \\
 &\leq |\lambda x + (1 - \lambda)y - z_0|, \text{ con } z_0 \in B \text{ cualquiera.} \\
 &\leq |\lambda x + (1 - \lambda)y - \lambda z_1 - (1 - \lambda)z_2| \\
 &\leq |\lambda(x - z_1)| + |(1 - \lambda)(y - z_2)| \\
 &= \lambda|x - z_1| + (1 - \lambda)|y - z_2| \\
 &\leq \lambda \inf\{|x - z_1| : z_1 \in B\} + (1 - \lambda) \inf\{|y - z_2| : z_2 \in B\} \\
 &= \lambda d(x, B) + (1 - \lambda)d(y, B)
 \end{aligned}$$

por lo tanto, $d(\cdot, B)$ es convexa.

Problema 2.5.3. Si $\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} \rightarrow \frac{1}{2}$ (converge), determinar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, \left| \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} - \frac{1}{2} \right| < 0,0002$.

Solución:

Desarrollando $\left| \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} - \frac{1}{2} \right|$, se tiene que $\frac{5}{4n^2 + 6} < 0,0002$. Considerando $\epsilon = 0,0002$ y despejando el n , se obtiene $\sqrt{\frac{\frac{5}{\epsilon} - 6}{4}} < n$. Como n_0 debe cumplir esta condición, se tiene que $n_0 > \sqrt{\frac{\frac{5}{\epsilon} - 6}{4}} \approx 79,04745\dots$, luego, $n_0 = 80$.

Problema 2.5.4. 1. Demostrar que si $0 < a < 2$, entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

2. Demostrar que la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$, converge.

3. Hallar el límite de la sucesión.

Solución:

1. Tenemos que $0 < a < 2$, luego, $0 < a^2 < 2a$, pues $a > 0$, entonces $0 < a < \sqrt{2a}$. También tenemos que $0 < 2a < 4$, entonces $0 < \sqrt{2a} < 2$. En conclusión $a < \sqrt{2a} < 2$.
2. Definiendo $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, tenemos que $0 < a_0 < 2$, luego $a_0 < \sqrt{2a_0} < 2$, que equivale a $a_0 < a_1 < 2$. Repitiendo el proceso, obtenemos que $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < 2$. Como la sucesión es creciente y acotada, converge.
3. Sabemos que $\exists l > 0$ tal que $a_n \rightarrow l$. Como $a_{n+1} \rightarrow l$, tomando límite tenemos que $l = \sqrt{2l}$, lo que implica que $l = 2$.

Problema 2.5.5 (P3, (a), C2, 2001). Pruebe que si (s_n) es una sucesión que satisface $\forall n \in \mathbb{N} |s_n - s_{n+2}| \geq \frac{1}{2}$, entonces (s_n) no es convergente.

Solución:

Por contradicción. Supongamos que $\exists l \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |s_n - l| < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Para este valor, sabemos que existe un n_0 tal que $\forall n \geq n_0, |s_n - l| < \epsilon$. Como $n + 2 > n \geq n_0$, se tiene que $|s_n - l| < \epsilon$ y $|s_{n+2} - l| < \epsilon$. Utilizando la desigualdad triangular, se obtiene $|s_n - s_{n+2}| = |s_n - l + l - s_{n+2}| \leq |s_n - l| + |s_{n+2} - l| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$. Por lo tanto se tiene que: $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |s_n - s_{n+2}| < 2\epsilon$, pero como $\frac{1}{2} \leq |s_n - s_{n+2}| < 2\epsilon \Rightarrow \frac{1}{2} < 2\epsilon$. La contradicción ocurre si tomamos $\epsilon = \frac{1}{4} - \delta$ con $\delta \in [0, \frac{1}{4})$, pues con esto se tendrá que $\frac{1}{4} < \frac{1}{4} - \delta \Rightarrow \delta < 0$.

2.6. Auxiliar 16

Problema 2.6.1 (Ejemplificador). Demostrar que $\frac{bn+1}{cn+1} \rightarrow \frac{b}{c}$ con $c \neq 0$.

Solución 2.6.1. Hay que ver que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, \left| \frac{bn+1}{cn+1} - \frac{b}{c} \right| < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$, busquemos el n_0 :

$$\begin{aligned} \left| \frac{bn+1}{cn+1} - \frac{b}{c} \right| &= \left| \frac{c(bn+1) - b(cn+1)}{c(cn+1)} \right| \\ &= \left| \frac{c-b}{c(cn+1)} \right| \end{aligned}$$

por lo tanto $\left| \frac{c-b}{c(cn+1)} \right| < \epsilon \Rightarrow |c-b| < \epsilon|c(cn+1)| \Rightarrow |c-b| < \epsilon|c^2n+c| < ||c^2n|+|c|| = |c^2n+|c|| \Rightarrow \frac{|c-b|-\epsilon|c|}{\epsilon} < c^2n \Rightarrow \frac{|c-b|-\epsilon|c|}{c^2\epsilon} < n$, luego, $\left\lceil \frac{|c-b|-\epsilon|c|}{c^2\epsilon} \right\rceil + 1 < n_0$.

Problema 2.6.2. Sea $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesion convergente, con limite l . Pruebe que $(|s_n|)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow |l|$.

Solución 2.6.2. Hay 3 casos:

1. Si $l = 0$, como $s_n \rightarrow l$, se tiene que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |s_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, ||s_n| - |0|| < \epsilon \Leftrightarrow |s_n| \rightarrow |0|$.
2. Si $l > 0$, $|l| = l$. A partir de cierto instante, $s_n > 0$. Tomando $\epsilon = \frac{l}{2}$, se tiene que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |s_n - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow \forall n \geq n_0, \frac{-l}{2} < s_n - l < \frac{l}{2} \Rightarrow \forall n \geq n_0, s_n \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}] \Rightarrow \forall n \geq n_0, s_n > 0$. Probemos que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, ||s_n| - |l|| < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1, |s_n - l| < \epsilon$. Tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, tenemos que $|s_n - l| < \epsilon \wedge |s_n| = s_n \Rightarrow ||s_n| - |l|| < \epsilon$ (pues $l = |l|$), luego $\forall \epsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2, ||s_n| - |l|| < \epsilon$.
3. Si $l < 0$, aplicando la parte anterior se tiene el resultado.

Problema 2.6.3. Pruebe que $\max\{u_n, v_n\} \rightarrow \max\{u, v\}$, donde $u_n \rightarrow u$ y $v_n \rightarrow v$.

Solución 2.6.3. Notemos que $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$. Por algebra de sucesiones, sabemos que $u_n - v_n \rightarrow u - v$ y $u_n + v_n \rightarrow u + v$, por el problema anterior, sabemos que $|u_n - v_n| \rightarrow |u - v|$. Luego, por algebra de sucesiones, tenemos que $\frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2} \rightarrow \frac{u + v + |u - v|}{2} = \max\{u, v\}$.

Problema 2.6.4. Calcular los siguientes limites:

1. $\lim \sqrt{n^2 + n} - n$

2. $\lim \frac{\text{sen } \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$
3. $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n}$
4. $\lim \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Solución 2.6.4. 1.

$$\begin{aligned}
 \lim \sqrt{n^2 + n} - n &= \lim \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} - n} \\
 &= \lim \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n} \\
 &= \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\
 &\stackrel{\text{algebra de limites}}{=} \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2. Sabemos que $-1 \leq \text{sen } \sqrt{n} \leq 1$, por lo tanto $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\text{sen } \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, por teorema del sandwich, $\frac{\text{sen } \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

3. Si $a > b > 0$, se tiene que $(\frac{b}{a})^n \rightarrow 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \lim \sqrt[n]{a^n + b^n} &= \lim a \sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^n} \\
 &= a
 \end{aligned}$$

$$\text{luego, } \lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \begin{cases} a & a > b \\ b & a < b \end{cases} .$$

4.

$$\begin{aligned}
 \lim \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \lim \frac{(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1)(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1)}{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \dots (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \lim \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \dots (n+1)} \\
 &= \lim \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n-2}{2n-2} \dots \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

como $\frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n-2}{2n-2} \dots \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}$, se tiene que $0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Por teorema del sandwich, $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \rightarrow 0$.

2.7. Auxiliar 17

Problema 2.7.1. Considere una sucesión (s_n) que satisface la propiedad

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |s_{n+2}| \leq q|s_n|$$

1. Usando inducción, demuestre que si $k \in \{0, 1\}$, se cumple $\forall n \geq n_0, |s_{2n+k}| \leq q^{n-n_0}|s_{2n_0+k}|$.
2. Concluya que la subsucesiones (s_{2n}) y (s_{2n+1}) convergen a cero y que por lo tanto (s_n) tambien lo hace.

Solución 2.7.1. 1. Sea $k \in \{0, 1\}$. Por inducción sobre $n \geq n_0$:

$n = n_0$:

Como $q^{n_0-n_0} = 1$ y $|s_{2n_0+k}| = |s_{2n_0+k}|$, se tiene $|s_{2n_0+k}| \leq q^{n_0-n_0}|s_{2n_0+k}|$.

$n \Rightarrow n + 1$:

Hipotesis: $|s_{2n+k}| \leq q^{n-n_0}|s_{2n_0+k}|$.

Por demostrar que: $|s_{2(n+1)+k}| \leq q^{(n+1)-n_0}|s_{2n_0+k}|$.

$$|s_{2n+k+2}| \leq q|s_{2n+k}| \leq qq^{n-n_0}|s_{2n_0+k}| = q^{(n+1)-n_0}|s_{2n_0+k}|.$$

2. Sabemos que $\forall q \in (0, 1), q^n \rightarrow 0$. Por algebra de sucesiones, $q^{n-n_0}|s_{2n_0+k}| \rightarrow 0$. Como $0 \leq |s_{2n+k}| \leq q^{n-n_0}|s_{2n_0+k}|$, por teorema del sandwich, $(s_{2n+k}) \rightarrow 0$. Por lo tanto $(s_{2n}) \rightarrow 0$ y $(s_{2n+1}) \rightarrow 0$. Para ver que $(s_n) \rightarrow 0$, basta con notar que $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, luego, por teorema 4.4.3. del apunte, $(s_n) \rightarrow 0$.

Problema 2.7.2. Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones, calculando sus límites cuando corresponda:

1. $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$
2. $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$
3. $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Solución 2.7.2. 1.

$$\begin{aligned} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \frac{n + \sqrt{n} - n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+\frac{\sqrt{n}}{n})} + \sqrt{n(1-\frac{\sqrt{n}}{n})}} \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} + \sqrt{n}\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}} \end{aligned}$$

como $\frac{\sqrt{n}}{n} \rightarrow 0$, se tiene que

$$\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{n}}{n}}} \rightarrow \frac{2}{1 + 1} \rightarrow 1$$

2.

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$$

Podemos tomar las subsucesiones $a_{2n} = \left(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ y $a_{2n+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 + \frac{-1}{2n+1}\right)^{2n+1}$ y como a_{2n} es subsucesion de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ entonces $a_{2n} \rightarrow e$ y a_{2n+1} es subsucesion de $\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$ entonces $a_{2n+1} \rightarrow \frac{1}{e}$, existen 2 subsucesiones de a_n que convergen a e y $\frac{1}{e}$, por lo tanto a_n no converge.

3. De la desigualdad

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

podemos obtener la siguiente desigualdad, considerando $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &\geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &\geq 1 + \sqrt{n} \end{aligned}$$

y como $1 + \sqrt{n} \rightarrow \infty$, por teorema del sandwich $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \rightarrow \infty$.

Problema 2.7.3 (P3 (b), (c) ,C2 2001). 1. Sea (u_n) una sucesion que converge a $\frac{1}{2}$. Pruebe que la sucesion (v_n) definida por $v_n = [u_n]$ satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

2. Sean (u_n) y (v_n) sucesiones creciente y decreciente respectivamente tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n)$. Pruebe que ambas sucesiones convergen y que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Solución 2.7.3. 1. Se tiene que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |u_n - \frac{1}{2}| < \epsilon$. Es decir, $\epsilon - \frac{1}{2} < u_n < \epsilon + \frac{1}{2}$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{4}$, nos queda $\frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4}$, por lo tanto $\forall n \geq n_0, v_n = [u_n] = 0$. Es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |v_n - 0| < \epsilon$.

2. Basta con ver que son acotadas. Sabemos que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |u_n - v_n - 0| < \epsilon$, tomando $\epsilon = 1$, se tiene que $-1 < u_n - v_n < 1$, luego $u_n < v_n + 1$. Como u_n es creciente, se tiene que $u_0 \leq u_n$ y como v_n es decreciente, $v_0 \geq v_n$, por lo tanto $u_0 - 1 < v_n$ y $u_n < v_0 + 1$, con lo cual son monotonas y acotadas lo que implica que convergen. Sean $l_1 = \lim u_n$ y $l_2 = \lim v_n$. Por algebra de sucesions, $0 = \lim u_n - v_n = \lim u_n - \lim v_n = l_1 - l_2$, por lo tanto $l_1 = l_2$.

2.8. Auxiliar 18

Problema 2.8.1. Calcular H sabiendo r, s, t, u y a .

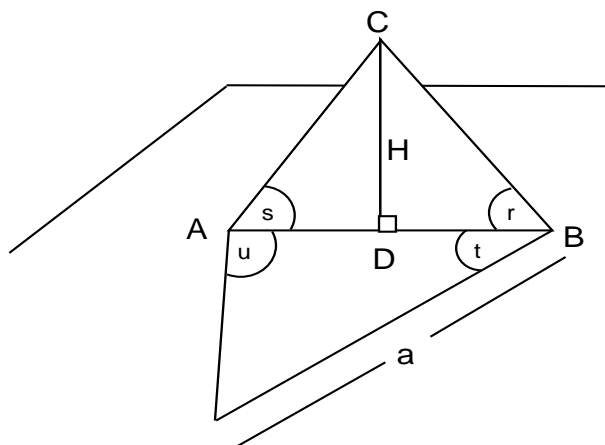


Figura 2.8: Triángulo perpendicular a un plano.

Solución 2.8.1. Sean $x = \overline{DB}$, $y = \overline{AD}$. Tenemos que $\tan r = \frac{H}{x}$, $\tan s = \frac{H}{y}$, lo que implica que $x = \frac{H}{\tan r}$, $y = \frac{H}{\tan s}$. Además, del teorema del seno, se tiene que $\frac{a}{\sin u} = \frac{x+y}{\sin(\pi-(t+u))} \Rightarrow (x+y) = \frac{a \sin(\pi-(t+u))}{\sin u} \Rightarrow H \left(\frac{1}{\tan r} + \frac{1}{\tan s} \right) = \frac{a \sin(\pi-(t+u))}{\sin u} \Rightarrow H = \frac{a \sin(\pi-(t+u))}{\sin u} \cdot \frac{\tan r \tan s}{\tan r + \tan s}$.

Problema 2.8.2. Analice el dominio, paridad, acotamiento, ceros y grafico de $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)$, sabiendo que $\sup\left\{\frac{\pi n}{\sqrt{\pi^2 - n^2}} : n \in \mathbb{N}\right\} = \pi$.

Solución 2.8.2. Dominio: Como $\sin(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, el argumento debe estar bien definido, es decir, $\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \pi^2 - x^2 > 0 \Rightarrow |x| < \pi$, por lo tanto, $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \pi\} = (-\pi, \pi)$.

Paridad: $f(-x) = \sin\left(\frac{-\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)$, pero $\sin -a = -\sin a$ (seno es impar), luego, $f(-x) = -f(x)$, f es impar.

Acotamiento: Como seno es una función acotada por -1 y 1 , también lo es f .

Ceros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = \text{Arcsen}(0) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $x^2 = k^2(\pi^2 - x^2) \Rightarrow x = \pm \frac{k\pi}{\sqrt{1+k^2}}$. Como $|x| < \pi \Rightarrow \frac{|k|\pi}{\sqrt{1+k^2}} < \pi \Rightarrow k^2 < 1+k^2$, por lo tanto se tiene para todo $k \in \mathbb{Z}$. $\text{Ceros}(f) = \left\{\frac{k\pi}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Gráfico:

Problema 2.8.3 (C2 99). 1. Considere $(a_n)_{n \geq 1}$ convergente a α . Sea $(b_n)_{n \geq 1}$ definida por $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$. Usando la definición de convergencia demostrar que $b_n \rightarrow \alpha$.

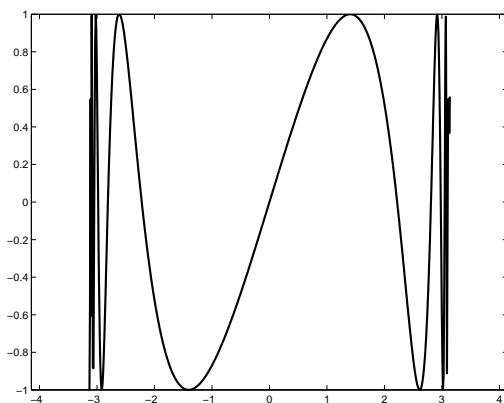


Figura 2.9: Gráfico de $f(x) = \frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}$.

2. Considere la función $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x > 0, 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$:

- Demostrar que $(f(1 + \frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ converge a cero.
- Analice la convergencia de la sucesión $(nf(1 + \frac{1}{n}))_{n \geq 1}$.

Solución 2.8.3. 1. $b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1} + |a_n - a_{n+1}|)$. Probemos por definicion que $b_n \rightarrow \alpha$, es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |b_n - \alpha| < \epsilon$.

Se sabe que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1, |a_n - \alpha| < \epsilon$, es decir, dado un $\epsilon > 0$, se tiene que $\forall n \geq n_1, \alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$, como $n + 1 > n \geq n_1, \alpha - \epsilon < a_{n+1} < \alpha + \epsilon$, luego $\forall n \geq n_1, 2(\alpha - \epsilon) < a_n + a_{n+1} < 2(\alpha + \epsilon)(*)$. Por otra parte, $-(\alpha - \epsilon) > -a_{n+1} > -(\alpha + \epsilon)$, por lo tanto $-2\epsilon < a_n - a_{n+1} < 2\epsilon$, es decir, $|a_n - a_{n+1}| < 2\epsilon(**)$.

Entonces, $b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1} + |a_n - a_{n+1}|) < \frac{1}{2}(2(\alpha + \epsilon + 2\epsilon))$ de (*) y (**), es decir, $b_n - \alpha < 2\epsilon$ y como $-2\epsilon < 0 \leq |a_n - a_{n+1}|$, se tiene tambien $-2\epsilon < b_n - \alpha$, se obtiene que $\forall n \geq n_1, |b_n - \alpha| < 2\epsilon$ y $b_n \rightarrow \alpha$.

2. a) Como $\forall x > 0, 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$, se tiene que $f(1 + \frac{1}{n}) \leq (1 + \frac{1}{n}) - 1 = \frac{1}{n}$ y $f(1 + \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{n}{n+1}$ y como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ y $1 - \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$, por teorema del sandwich, $f(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 0$.

b)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n}{n+1} &\leq f(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \\ n \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) &\leq nf(1 + \frac{1}{n}) \leq 1 \\ \frac{n}{n+1} &\leq nf(1 + \frac{1}{n}) \leq 1 \end{aligned}$$

por teorema del sandwich, $nf(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 1$.

2.9. Auxiliar 19

Problema 2.9.1 (P2 C3 1996). Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} &= \frac{b_0}{a_0} \sqrt{a_n b_n} \end{aligned}$$

con $a_0 > b_0 > 0$.

1. Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) es decreciente.
2. Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que son convergentes.
3. Calcule los limites de las sucesiones.

Solución 2.9.1. 1. Como $\forall n \geq 0, b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0} \sqrt{a_n b_n} = \frac{b_0}{a_0} a_{n+1} \Rightarrow \forall n \geq 0, \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_0}{a_0}$.

Calculemos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} < 1$, por lo tanto (a_n) es decreciente.

Como $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, con lo cual (b_n) es decreciente.

2. Como todos los terminos de las sucesiones son positivos, estan acotadas inferiormente por 0, y como son decrecientes, convergen a limites a y b respectivamente.
3. Haciendo $n \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{ab} \\ b &= \frac{b_0}{a_0} \sqrt{ab} \end{aligned}$$

De la primera ecuacion, se obtiene $a = 0 \vee a = b$. Si $a = 0$, de la segunda ecuacion se obtiene que $b = 0$. Si $a = b$, de la segunda ecuacion de se tiene que $a = b = 0$, por lo tanto, $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$.

Problema 2.9.2. Una sucesion (a_n) es de Cauchy si y solo si $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \epsilon$. Pruebe que toda sucesion convergente es de Cauchy. Pruebe que toda sucesion de Cauchy es convergente.

Solución 2.9.2. 1. Sea $a_n \rightarrow l$ sucesion convergente, es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |a_n - l| < \epsilon$. Podemos tomar $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$. Con esto, tenemos que $\forall \tilde{\epsilon} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |a_n - l| < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$. Por lo tanto,

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| \underset{\forall n, m \geq n_0}{<} \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} = \tilde{\epsilon}$$

es decir, $\forall \tilde{\epsilon} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \tilde{\epsilon}$.

2. Sabemos que si (a_n) tiene un unico punto de acumulacion y es acotada, entonces converge. Sea $\epsilon = M > 0$, sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < M$, tomando $m = n_0$, se tiene que $|a_n - a_{n_0}| < M \Leftrightarrow -M < a_n - a_{n_0} \wedge a_n - a_{n_0} < M \Leftrightarrow -M + a_{n_0} < a_n < M + a_{n_0}$, por lo tanto $\exists N = \max\{|-M + [a_{n_0}] - 1|, |M + [a_{n_0}] + 1|\}$ tal que $\forall n \geq N, |a_n| < N$, luego, es acotada. Veamos que tiene un unico punto de acumulacion. Supongamos que $\exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ puntos de acumulacion de (a_n) . Sea $\epsilon = \frac{|a-b|}{3}$. Los conjuntos $U = \{n : |a_n - a| < \epsilon\}$ y $V = \{n : |a_n - b| < \epsilon\}$ son infinitos y disjuntos. Ademias, $\forall n \in U, \forall m \in V, |a_n - a_m| \geq \epsilon$, es decir, se tiene que $\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n, m \geq n_0, |a_n - a_m| \geq \epsilon$, lo que contradice la definicion de sucesion de Cauchy.

Problema 2.9.3. Este problema investiga para cuales $x > 0$ tiene sentido la expresi3n $x^{x^{x^{\cdots}}}$. En otras palabras, si definimos $a_1(x) = x, a_{n+1}(x) = x^{a_n(x)}$, nos interesa saber cuando existe $b(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$.

1. Demostrar que si existe $b(x)$, entonces $x^{b(x)} = b(x)$.
2. Si existe $b(x)$, entonces $x = y^{\frac{1}{y}}$ para algun y . Deducir que $0 < x \leq e^{\frac{1}{e}}$. Indicaci3n: Considere el grafico de la funcion $f(y) = \frac{\log y}{y}$.
3. Suponiendo que $0 < x \leq e^{\frac{1}{e}}$, demostrar que $a_n(x) \leq e$. Como $(a_n(x))$ es claramente decreciente, esto demuestra que $b(x)$ existe.
4. Hallar $b(\sqrt{2})$ y $b(e^{\frac{1}{e}})$.

Soluci3n 2.9.3. 1. Tomando limite, obtenemos que $b(x) = x^{b(x)}$.

2. Sabemos que $x = y^{\frac{1}{y}}$ para ciertos valores de y . Esto equivale a que $\log(x) = \frac{\log(y)}{y}$. La

grafica de la funci3n $f(y) = \frac{\log(y)}{y}$ es

Veamos primero que $e^{\frac{1}{e}} > 1$. Si se tuviera $e^{\frac{1}{e}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 0$, lo cual es una contradiccion. Se puede ver en el grafico que la funcion presenta un maximo, donde es creciente hasta llegar a el y decreciente desde entonces. Veamos que f es est. creciente en $(0, e^{\frac{1}{e}}]$. Sea $y \in (0, e^{\frac{1}{e}})$, veamos que $\frac{\log y}{y} < \frac{1}{e}$. Como $y < e^{\frac{1}{e}}$, necesariamente se tendra que $\log y < \frac{1}{e}$. Si $y > 1 \Rightarrow \frac{\log y}{y} < \frac{1}{e}$ y si $y < 1 \Rightarrow \frac{\log y}{y} < \frac{1}{e}$. Por lo tanto se tiene el resultado. Para $y \in (e^{\frac{1}{e}}, \infty)$, veamos que $\frac{\log y}{y} < \frac{1}{e}$. Como $y > e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow \log y > \frac{1}{e}$ y como $1 < e^{\frac{1}{e}} < y$, se tiene que $\frac{\log y}{y} < \frac{1}{e}$. Por lo tanto $\frac{\log y}{y} \leq \frac{\log e}{e} \Rightarrow y^{\frac{1}{y}} \leq e^{\frac{1}{e}}$ y como $0 < x = y^{\frac{1}{y}} \leq e^{\frac{1}{e}}$, se tiene el resultado.

3. Por inducci3n. Para $a_1(x) = x$, se tiene que $e^{\frac{1}{e}} \leq e$. Sabemos que $a_{n+1}(x) = x^{a_n(x)}$, entonces $e^{\frac{1}{e}e} = e$ (hipotesis de induccion). Luego $a_n(x) \leq e$. Como $(a_n(x))$ es acotada y monotona (si $x \geq 1$, la sucesion sera (est.) creciente, si $x < 1$ la sucesion sera est. decreciente), se tiene que converge, por lo tanto $b(x)$ existe.

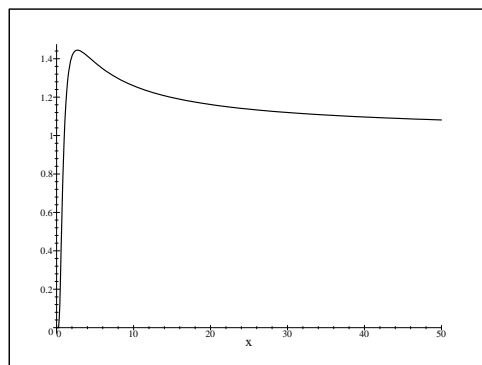


Figura 2.10: Grafico de $f(y) = \frac{\log y}{y}$

4. $b(\sqrt{2})^{\frac{1}{b(\sqrt{2})}} = 2^{\frac{1}{2}}$, luego $b(\sqrt{2}) = 2$. El caso $b(e^{\frac{1}{e}}) = e$ es identico.

2.10. Pauta Ejercicio 2

Problema 2.10.1. a) Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que existe un $c \in (a, b)$ donde f es estrictamente creciente en (a, c) y estrictamente decreciente en (c, b) . Demuestre que $f(c) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$.

b) Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ una función. Estudie las siguientes proposiciones, demostrando cuando sean ciertas y mostrando un contraejemplo cuando sean falsas.

1) $\left(\frac{1}{f(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.

2) Si f es inyectiva entonces $\left(\frac{1}{f(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

3) Si f es sobreyectiva entonces cero es un punto de acumulacion de $\left(\frac{1}{f(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solución 2.10.1. a) Por contradicción. Supongamos que $\exists m \in (a, b)$ tal que $\forall x \in (a, b), m \neq c \wedge f(m) > f(x)$. Supongamos $m > c$. Como $\forall x, y \in (c, b), x < y$ se tiene $f(x) > f(y)$, por lo tanto $f(c) > f(m)$, lo cual es una contradicción. Para $m < c$, se tiene que $f(m) < f(c)$. Por lo tanto $f(c) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$.

b) 1) Como $f \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que $\frac{1}{f} \subset (0, 1]$, por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{f(n)} \leq 1$, por lo tanto es acotada.

2) Hay que probar que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, \frac{1}{f(n)} < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Como f es inyectiva, cada $f(n)$ se utiliza una sola vez, por lo tanto, a partir de algun n_0 , se tendrá que $\forall n \geq n_0, f(n) > \frac{1}{\epsilon}$ ("principio del palomar": si hay n nidos y en ellos duermen $n + 1$ palomas, entonces hay al menos un nido en el cual duerme mas de una paloma).

3) Hay que probar que para cualquier intervalo $(0, \epsilon)$, existen infinitos terminos de la sucesion $\left(\frac{1}{f(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ contenidos en él, o equivalentemente, que para cualquier $\epsilon > 0$, en el intervalo $(\frac{1}{\epsilon}, \infty)$ existan infinitos terminos de la sucesion $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$, lo cual es cierto pues f es sobreyectiva, es decir, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = n$.

Problema 2.10.2. Pruebe la siguiente identidad trigonométrica (indicando cada paso)

$$\frac{\cot g(x)}{\cot g(x) - \cot g^3(x)} + \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(3x)} = 1$$

Solución 2.10.2. Propuesto.

Problema 2.10.3. Demuestre que si (a_n) converge y una infinidad de sus terminos son estrictamente positivos y una infinidad son negativos, entonces $a_n \rightarrow 0$. Demuestre

que si (a_n) es creciente y tiene un punto de acumulación α entonces es convergente y $\lim a_n = \alpha$.

Solución 2.10.3. Supongamos $a_n \rightarrow c$, con $c \neq 0$. Para $c > 0$, se tendrá que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |a_n - c| < \epsilon$. Sea $\epsilon = c$. Se tiene entonces que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |a_n - c| < c$, es decir, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, -c < a_n - c < c \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, -c < a_n - c \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, 0 < a_n$, lo cual es una contradicción pues existiría una cantidad finita de términos negativos. Para el caso $c < 0$, basta tomar $\epsilon = -c$ para llegar a una contradicción.

Como α es punto de acumulación, significa que existen infinitos términos de la sucesión en cualquier intervalo $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$. α debe ser mayor o igual al primer término pues de lo contrario existiría un intervalo $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ en el que habría una cantidad finita de términos de la sucesión. Como $\alpha \geq a_0$, si existiera un término mayor que α , existiría un intervalo $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ con una cantidad finita de términos (pues la sucesión es creciente), lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha$ y como (a_n) es creciente, la sucesión converge. Como converge, cada punto de acumulación debe ser igual al límite, por lo tanto $\lim a_n = \alpha$.

Capítulo 3

Auxiliares para el Control 3

3.1. Auxiliar 20

Problema 3.1.1. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n(n+1)}$ si y solo si (a_n) es sucesion de Cauchy.

Solución 3.1.1. Sea (a_n) suc. de Cauchy, es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \epsilon$. Supongamos que $\exists N \in \mathbb{N} |a_{N+1} - a_N| \geq \frac{1}{N(N+1)}$. Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que existe un n_0 tal que $\forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \epsilon$. Si $N \geq n_0 \Rightarrow N+1 > n_0$, por lo tanto se debe tener que $|a_{N+1} - a_N| < \epsilon$, lo que implica $\frac{1}{N(N+1)} < \epsilon$. Escogiendo $\epsilon = \frac{1}{N(N+1)} - \delta$, con $\frac{1}{N(N+1)} > \delta > 0$, se tendra que $\delta < 0$, lo cual es una contradiccion. Si $N < n_0$, propuesto.

Sea (a_n) tal que $d[(a_n)] = V$. Sea $\epsilon > 0$. Hay que encontrar un n_0 tal que $\forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \epsilon$. Como $\forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n(n+1)}$, es decir, si $n \leq m$, $|a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n+1}| + \dots + |a_{m-1} - a_m| < \sum_{i=n}^m \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{nm}$. Por lo tanto, se debe tener que $\frac{m-n}{nm} < \epsilon \Rightarrow m-n < nm\epsilon \Rightarrow m < n(1+m\epsilon) \Rightarrow \frac{m}{1+m\epsilon} < n \Rightarrow n_0 = \left[\frac{m}{1+m\epsilon} \right] + 1$.

Problema 3.1.2. a) Resolver $\log_y(x) + \log_x(y) = 2$ y $xy = 9$.

b) Que restricciones debe satisfacer x para que la ecuacion $\log_2(\sqrt{x+2}) = \log_4(3x+4)$ tenga solucion? . Encuentre la solucion.

Solución 3.1.2. a) De $xy = 9$, se sabe que $\log_y x = \log_y 9 - 1$ y $\log_x y = \log_{\frac{9}{y}} y$, reemplazando en la primera ecuacion, se tiene que $\log_y 9 + \log_{\frac{9}{y}} y = 3$. Como

$\log_{\frac{9}{y}} y = \frac{1}{\log_y 9 - 1}$, se tiene que $(\log_y 9)^2 - \log_y 9 + 1 = 3 \log_y 9 - 3 \Rightarrow (\log_y 9)^2 - 4 \log_y 9 + 4 = 0$, por lo tanto $\log_y 9 = 2 \Rightarrow y = 3$ y en consecuencia $x = 3$.

b) Se sabe que $\log_4(3x+4) = \frac{\log_2(3x+4)}{2}$, por lo tanto, $2 \log_2(\sqrt{x+2}) = \log_2(3x+4)$, es decir, $x+2 = 3x+4 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$.

Problema 3.1.3 (P1 C3 2001).

Solución 3.1.3. Ver http://www.dim.uchile.cl/~lmella/publicacion_seccion_calculo_pauta_control_3_2001.

3.2. Auxiliar 21

Problema 3.2.1. Sea $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Pruebe que esta sucesión converge. HINT: Pruebe que es creciente y acotada.

Solución 3.2.1. Creciente: Veamos $s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, por lo tanto $s_{n+1} > s_n$, lo que implica que es creciente.

Acotada: Notemos que $k^2 \geq k^2 - k \Rightarrow \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ para todo k . Tenemos que:
 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{1} = 2 - \frac{1}{n}$,
con lo cual $s_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como es creciente y acotada, por el teorema de las suc. monotonas, converge. ($\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{\pi^2}{6}$).

Problema 3.2.2. Pruebe que:

- a) Si $\lim x_n = \infty$ y y_n acotada inferiormente, entonces $\lim x_n y_n = \infty$.
- b) Si $\lim x_n = \infty$ y y_n acotada inferiormente, entonces $\lim x_n + y_n = \infty$

Solución 3.2.2. Propuesto. (Ver apunte).

Problema 3.2.3. Calcule:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^n$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right)^{(n-1)^2}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_n^n}$ con $a_i \geq 0$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n!}{n}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (\sin(\sqrt{n}) + a)}{\sqrt{n}}$

Solución 3.2.3. a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n-1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n-1} \right)^{\frac{3n}{3}} \left(1 + \frac{2}{3n-1} \right)^{\frac{-1}{3}} \left(1 + \frac{2}{3n-1} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{3n-1} \right)^{3n-1}} \left(1 + \frac{2}{3n-1} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{e^2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{n^2-2n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{-2n} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{-2n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{-2n} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{\sqrt{2n}}\right)^{-\sqrt{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{\sqrt{2n}}\right)^{-\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \\
&= \sqrt{e^{-1}}(e^{-1})^{-\sqrt{2}}(e)^{\sqrt{2}}1 \\
&= e^{\frac{-1}{2}}
\end{aligned}$$

c) $\sqrt[n]{a_{\max}^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_n^n} \leq \sqrt[n]{na_{\max}^n}$, lo que implica que $\sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_n^n} \rightarrow a_{\max}$.

d) Propuesto.

e) Sucesion acotada por una que se va a cero, implica que se va a cero.

f) Caso similar al anterior.

Problema 3.2.4. Sea $s_0 = a$, $s_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + s_n^2}{a+1}}$ para $a \geq b$, $a > 0$, $b > 0$.

a) Probar que la sucesion converge.

b) Calcular el limite.

Solución 3.2.4. a) Veamos $s_{n+1} - s_n$. Por induccion mostremos que esa diferencia es negativa:

Caso base: $s_1 = \sqrt{\frac{ab^2 + a^2}{a+1}} \leq \sqrt{a^3 + a^2a + 1} = |a| = a$, luego $s_1 \leq s_0$.

Paso Inductivo: por hipotesis, $s_n \geq s_{n+1} \Rightarrow \frac{ab^2 + s_n^2}{a+1} \geq \frac{ab^2 + s_{n+1}^2}{a+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{ab^2 + s_n^2}{a+1}} \geq$

$\sqrt{\frac{ab^2 + s_{n+1}^2}{a+1}} \Rightarrow s_{n+1} \geq s_{n+2}$. Por lo tanto s_n es decreciente. Como $s_n > 0$, esta acotada inferiormente, luego converge.

b) $l = \sqrt{\frac{ab^2 + l^2}{a+1}} \Rightarrow l = b$.

3.3. Auxiliar 22

Recuerdo 3. a) Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente a a se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

b) Definición Epsilon-Delta: Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si y solo si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Problema 3.3.1. a) Dada la función $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$, con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, a \neq 0, d \neq 0$, analice su continuidad.

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \in [0, 3] \\ ax + b & x \in [3, 5] \end{cases}$. Calcular a y b de modo que:

- 1) $y = ax + b$ pase por el origen y la función f sea continua en $x = 3$.
- 2) $y = ax + b$ tenga pendiente -2 y f sea continua en $x = 3$.

Solución 3.3.1. a) El dominio de la función es $Dom(h) = \{x \in \mathbb{R} : dx^2 + ex + f \neq 0\}$, es decir, $\mathbb{R} \setminus Z(dx^2 + ex + f)$. Las posibles raíces de esta ecuación de 2º grado son $x_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4df}}{2d}$, por lo tanto:

- $Dom(h) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{e}{2d} \right\}$ si $e^2 - 4df = 0$ y la función h es continua en $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{e}{2d} \right\}$.
- $Dom(h) = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$ si $e^2 - 4df > 0$ y h es continua en $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.
- $Dom(h) = \mathbb{R}$ si $e^2 - 4df < 0$ y h es continua en \mathbb{R} .

- b) 1) Si $y = ax + b$ pasa por el origen, entonces $b = 0$, y como se desea que f sea continua en $x = 3$, se debe tener que para toda sucesión (x_n) convergente a $x = 3$, $f(x_n) \rightarrow f(3) = 3^2 - 2 = 7$. Por lo tanto, la recta debe pasar por el punto $(3, 7)$, con lo cual $a = \frac{7}{3}$.
- 2) La recta $y = ax + b$ debe tener $a = -2$ y pasar por el punto $(3, 7)$, por lo tanto $b = 13$.

Problema 3.3.2. a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 = 0$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N}, f(\frac{1}{n}) > 0$. Demuestre que $f(0)$ no puede ser estrictamente negativo.

b) Sea $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $h(xy) = h(x) + h(y)$ (homeomorfismo). Demuestre que si h es continua en $x = 1$ entonces h es continua en todo su dominio. (HINT: Demuestre primero que $h(1) = 0$).

c) Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas con $g(0) = 0$ y $f(1) = 0$. Demuestre que existe un $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

Solución 3.3.2. a) Supongamos que $f(0) < 0$. Veamos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, f(\frac{1}{n_0}) \leq 0$. Como f es continua en cero, dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a cero, se tiene que $\lim f(a_n) = f(0)$, es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |f(a_n) - f(0)| < \epsilon$. Sean $a_n = \frac{1}{n}$ y $\epsilon > 0$. Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |f(\frac{1}{n}) - f(0)| < \epsilon$, o equivalentemente, $f(0) - \epsilon < f(\frac{1}{n}) < f(0) + \epsilon$. Tomando la desigualdad $f(\frac{1}{n}) <$

$f(0) + \epsilon$, se tiene que $f(0) > f(\frac{1}{n}) - \epsilon$. Si consideramos $\epsilon = -f(0)$, se tiene que $0 > f(\frac{1}{n})$, lo cual es una contradiccion.

- b) Hay que probar que $\forall x \in \mathbb{R}$, dada una sucesion $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $a_n \rightarrow x$, se tiene que $\lim h(a_n) = h(x)$. Veamos que $h(1) = 0$: $h(1) = h(1 \cdot 1) = h(1) + h(1) \Rightarrow h(1) = 0$. Sea $x \in (0, \infty)$ y (a_n) una sucesion convergente a x . Veamos si $\lim h(a_n) = h(x)$:

$$\begin{aligned}\lim h(a_n) &= \lim h(a_n \cdot x \cdot x^{-1}) \\ &= \lim \left[h\left(\frac{a_n}{x}\right) + h(x) \right]\end{aligned}$$

como $\frac{a_n}{x} \rightarrow 1$, $h\left(\frac{a_n}{x}\right) \rightarrow h(1)$, y $\lim h(x) = h(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim h(a_n) &= h(1) + \lim h(x) \\ &= 0 + h(x) \\ &= h(x)\end{aligned}$$

- c) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Es continua por algebra de funciones continuas. Evaluando: $h(1) = f(1) - g(1) = -g(1) \leq 0$ y $h(0) = f(0) - g(0) = f(0) \geq 0$. Como $h(1)h(0) \leq 0$, por el teorema del valor intermedio (5.4.1), se sabe que existe un $x_0 \in [0, 1]$ tal que $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

Problema 3.3.3 (En la clase auxiliar se resolvió otro problema en la parte (1), el cual estaba incorrecto.). .

- a) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \in \mathbb{I} \end{cases}$. Pruebe que:

- 1) f es inyectiva en $[0, 1]$
- 2) $f(f(x)) = x$, para todo $x \in [0, 1]$.
- 3) f solo es continua en $x = \frac{1}{2}$.

- b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua. Pruebe que si $Im(f) \subseteq \mathbb{Q}$, entonces f es constante.

Solución 3.3.3. a) 1) Por contradiccion. Si $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$, se tiene que si $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, $f(x_1) = x_1 = x_2 = f(x_2)$, contradiccion. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$, $f(x_1) = 1 - x_1 = 1 - x_2 = f(x_2)$, contradiccion. Si $x_1 \in \mathbb{Q}$ y $x_2 \in \mathbb{I}$, se tiene que $x_1 = 1 - x_2$, pero $1 - x_2 \in \mathbb{I}$, contradiccion.

- 2) Si $x \in \mathbb{Q}$, $f(f(x)) = f(x) = x$. Si $x \in \mathbb{I}$, $f(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - 1 + x = x$.

- 3) Para $a = \frac{1}{2}$. Sea $\epsilon > 0$. Denotando $\delta = \epsilon$ y $|x - \frac{1}{2}| < \delta$, se tiene que si $x \in \mathbb{Q}$, $|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}| < \epsilon$. Si $x \in \mathbb{I}$, $|f(x) - \frac{1}{2}| = |1 - \frac{1}{2} - x| = |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}| < \epsilon$.

Para $a \neq \frac{1}{2}$. Supongamos $a \in \mathbb{Q}$, $a < \frac{1}{2}$. Si f es continua en a , se tiene que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| = |f(x) - a| < \epsilon$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2} - a$ y $x_n \rightarrow a$, con $(x_n) \subset \mathbb{I}$. Con esto, si desde algun $n_0 \in \mathbb{N}$ se

tiene que $|x_n - a| < \delta$ entonces $|f(x_n) - a| = |1 - x_n - a| < \frac{1}{2} - a$, es decir, $1 - x_n - a < \frac{1}{2} - a$, lo que implica que $x_n > \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0$, lo cual es una contradicción pues $x_n \rightarrow a$. Los otros casos quedan propuestos.

b) Demostremos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$ entonces existe algún $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración 3.3.1. Sea $g = f - c$. Por algebra de funciones continuas, g es continua y $g(a) < 0$ y $0 < g(b)$. Por el teorema del valor intermedio, se tiene el resultado.

Tomando un intervalo cerrado $[a, b]$, se tiene que $f(a), f(b) \in \mathbb{Q}, f(a) \neq f(b)$, y tomando $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (densidad de los irracionales en los racionales), tal que $f(a) < c < f(b)$ o $f(b) < c < f(a)$, se tiene que $\exists z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = c$, lo que contradice el enunciado. Por lo tanto, $f(a) = f(b)$ para cualquier intervalo $[a, b], a \leq b$ en los reales.

3.4. Auxiliar 23

Problema 3.4.1. Calcule:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(x - 1)}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^2 \cos \frac{1}{x}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución 3.4.1. a)

$$n(\sqrt[n]{e} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0}$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} = e^a$, con $a_n \rightarrow a$, considerando $a = 0$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha x} \frac{\beta x}{\operatorname{sen} \beta x} \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x} - 0} \right) \frac{1}{\sqrt{x}}$$

y como la multiplicación de una función cuyo límite existe por una que diverge, diverge, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = +\infty$.

d) Haciendo el cambio de variables $\ln x^2 = y \Rightarrow 2 \ln x = y \Rightarrow x = e^{\frac{y}{2}}$ y recordando la parte (1), se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 0}{e^y - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi(x-1) + \pi)}{x(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi(x-1)) \cos \pi + \cos(\pi(x-1)) \operatorname{sen} \pi}{x(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\operatorname{sen}(\pi(x-1))}{x(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi(x-1))}{x \pi(x-1)} \\
 &= -\pi
 \end{aligned}$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^2 \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln(1+x) \cos \frac{1}{x}$$

Sabemos que $\ln(1+x) \leq (1+x) - 1 = x$. Estudiemos $|2 \ln(1+x) \cos \frac{1}{x}|$:

$$0 \leq |2 \ln(1+x) \cos \frac{1}{x}| \leq 2 \cdot x \cdot 1 = 2x$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^2 \cos \frac{1}{x} = 0$.

g)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \exp \left(\ln \left(x^{\frac{1}{1-x}} \right) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \exp \left(\frac{1}{1-x} \ln x \right) \\
 &\stackrel{\text{exp es continua}}{=} \exp \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \ln x \right)
 \end{aligned}$$

como $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ para $x > 0$, se tiene que $\frac{1 - \frac{1}{x}}{1-x} \leq \frac{\ln x}{1-x} \leq \frac{x-1}{1-x} \Leftrightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\ln x}{1-x} \leq -1$, luego, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$. Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$.

Problema 3.4.2. Pruebe que $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$.

Solución 3.4.2. Tomemos una sucesión $x_n \rightarrow 0$ y veamos que sucede cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea $x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi} \rightarrow 0$. $f(x_n) = \operatorname{sen} \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} \right) = (-1)^{n+1}$. Es decir,

$f(x_n) = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ -1 & n = 2k+1 \end{cases}$. Por lo tanto no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, es decir, no es continua en cero.

Problema 3.4.3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \operatorname{sen} x & x > 0 \\ \ln(1-x) & x \leq 0 \end{cases}$.

- a) Demuestre que $|f(x)| \leq |x|$.
 b) Demuestre que f es continua en cero, y en \mathbb{R} .

Solución 3.4.3. a) Recordemos que $e^x \geq 1+x$, por lo tanto, para $x > 0$, $|f(x)| = \left| \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} \right| \leq \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x} \leq \frac{|x|}{1+x} \leq |x|$.

Para $x \leq 0$, recordemos que $e^{y-1} \geq y \Rightarrow x-1 \geq \ln x$ y que $\ln(1-x) > 0$, por lo tanto $|f(x)| = |\ln(1-x)| = \ln(1-x) \leq (1-x) - 1 = -x = |x|$.

- b) Para ver que es continua en cero, usemos $x_n \rightarrow 0$. Veamos que $f(x_n) \rightarrow f(0)$. $f(0) = \ln 1 = 0$, por lo tanto $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ implica que $|f(x)|$ es continua en cero, pero como $|\cdot|$ es continua en \mathbb{R} , entonces f debe ser continua en cero. En \mathbb{R} , es continua por ser composicion de funciones continuas.

Problema 3.4.4. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$. Encontrar a tal que f sea continua en \mathbb{R} .

Solución 3.4.4. En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es continua por ser composicion de funciones continuas. Veamos en cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} a \frac{\operatorname{sen} ax}{ax} \\ &= a \end{aligned}$$

como $f(0) = 2$, se debe tene que $a = 2$.

3.5. Auxiliar 24

Teorema 3.5.1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcion continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema 3.5.2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcion continua y $c, d \in f([a, b]), c \leq d$, entonces para todo numero $e \in [c, d]$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.

Teorema 3.5.3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcion continua. Entonces f es acotada y alcanza su maximo y su minimo en $[a, b]$.

Problema 3.5.1. Sea $f_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ funcion continua. Pruebe que si $c \in Im(f)$, entonces $Im(f) \subseteq (-\infty, c] \vee Im(f) \subseteq [c, \infty)$.

Solución 3.5.1. Por contradiccion. Supongamos $Im(f)$ no esta contenido en $(-\infty, c]$ y $Im(f)$ no esta contenido en $[c, \infty)$. Es decir, existen $a \in Im(f) \setminus (-\infty, c]$ y $b \in Im(f) \setminus [c, \infty)$, por lo tanto existen $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_a) = a \leq c$ y $f(x_b) = b \geq c$. Aplicando el teorema del valor medio, se tiene que existe un $x_c \in [x_a, x_b]$ tal que $f(x_c) = c$, pero si ocurre esto se tendria que $Im(f) \subseteq (-\infty, c] \vee Im(f) \subseteq [c, \infty)$, lo que es una contradiccion.

Problema 3.5.2 (Fácil). Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la funcion

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & 0 < x < 1 \\ cx + b & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{satisfaga el TVI en el intervalo } [0, 2].$$

Solución 3.5.2. f debe ser continua en el intervalo, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 + 3x + a = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 3x + a = \lim_{x \rightarrow 1^+} cx + b$, es decir, $a = 3, 7 = c + b$.

Problema 3.5.3 (C4, 1991). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea $f_{\mathbb{R}}^+ \cup \{0\}$ definida por $f(x) = \max_{t \in [0, x]} g(t)$. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}^+$ es tal que $g(x_0) < f(x_0)$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que f es constante en $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$.

Solución 3.5.3. Del teorema (3.5.3) sabemos que en el intervalo $[0, x]$, g alcanza su maximo (es un valor unico) y por lo tanto la funcion f esta bien definida. Sea $c \in [0, x_0[$ tal que $f(x_0) = g(c)$, el cual existe por el mismo teorema. Sea $\epsilon' = f(x_0) - g(x_0) > 0$, como g es continua, en particular lo es en x_0 , por lo tanto $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon'$, es decir, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow g(x) < g(x_0) + \epsilon' = f(x_0)$. Definiendo $\epsilon = \frac{\delta}{2}$, se tiene que $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), g(x) < f(x_0)$.

Como $g(c) = f(x_0)$, se debe tener que $c \notin (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ y como $c \in [0, x_0[$, entonces $c \in [0, x_0 - \epsilon)$. Finalmente, dado $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, se tendra que $g(c) = \max_{t \in [0, c]} g(t) \leq \max_{t \in [0, x]} g(t) = f(x) \leq g(c)$, por lo tanto $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), g(c) = f(x)$.

Problema 3.5.4. Analice la continuidad de la funcion $f(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{x(x-1)}$ y extiendala (si es posible) de manera que sea continua en todo \mathbb{R} (reparar las discontinuidades).

Solución 3.5.4. Los puntos de discontinuidad claramente son $\{0, 1\}$, luego, hay que estudiar los límites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Caso $x = 0$:

La función f puede escribirse de la forma $f(x) = \frac{\pi}{x-1} \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, y si $x \rightarrow 0$ entonces $\pi x \rightarrow 0$, por lo tanto $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1$, con lo que se obtiene $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\pi$, independientemente de si $x \rightarrow 0^-$ o $x \rightarrow 0^+$.

Caso $x = 1$:

La función \sin cumple con la propiedad $-\sin \pi x = \sin(\pi x - \pi) = \sin \pi(x-1)$ y podemos escribir f de la forma $f(x) = \frac{-\pi \sin \pi(x-1)}{x \pi(x-1)}$, aplicando los mismos argumentos del caso anterior se concluye que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\pi$, independientemente de si $x \rightarrow 1^-$ o $x \rightarrow 1^+$.

Con esto, se extiende la función f a los puntos donde no estaba definida (puntos de discontinuidad) de la forma:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ -\pi & x \in \{0, 1\} \end{cases}.$$

3.6. Auxiliar 25

Problema 3.6.1. Sea f continua y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) > 0$. Pruebe que existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in [\bar{x} - \eta, \bar{x} + \eta]$, $f(x) > 0$.

Solución 3.6.1. Como f es continua, en particular lo es en \bar{x} , es decir, $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) > 0$, o equivalentemente, $x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. Por definicion tenemos que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |f(x_n) - f(\bar{x})| < \epsilon$, lo que implica que $f(\bar{x}) - \epsilon < f(x_n) < f(\bar{x}) + \epsilon$, como $f(\bar{x}) > 0$, basta tomar $\epsilon < f(\bar{x})$, con lo que se obtiene $\forall n \geq n_0, f(x_n) > 0$, es decir, $\exists \epsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon$ para todo $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

Problema 3.6.2. Un auto viaja desde Santiago a Concepción recorriendo 500 kilometros en 10 horas. Demuestre que existe un tramo de 50 km. que fue recorrido en una hora.

Solución 3.6.2. Sea $d(t)$ la funcion distancia recorrida en t horas. Esta funcion es continua, ya que es imposible "saltar" un tramo del recorrido. La distancia recorrida en una hora es $f(t) = d(t+1) - d(t)$, con $t \in [0, 9]$. f es continua por ser suma de funciones continuas. Supongamos $\forall t \in [0, 9], f(t) > 50$. Esto implica que $f(k) > 50$ para $k \in \{0, \dots, 9\}$. Luego $\sum_{k=0}^9 f(k) > 500$, es decir, recorre mas de 500 km., por lo tanto $\exists t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_1) \leq 50$. Aanalógamente, suponiendo que $\forall t, f(t) < 50$ tambien se tiene una contradiccion (recorre menos de 500 km.), con lo que existe un t^* tal que $f(t^*) = 50$.

Problema 3.6.3 (Resuelto en la auxiliar 22).

3.7. Auxiliar 26

Problema 3.7.1. Demuestre el siguiente teorema:

Teorema 3.7.1. Si f es continua en a , entonces existe un $\delta > 0$ tal que f esta acotada superiormente en $(a - \delta, a + \delta)$.

Solución 3.7.1. Como f es continua en a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Luego, tomando cualquier $\epsilon > 0$, se tiene que en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, la funcion esta acotada superiormente por $f(a) + \epsilon$ y tambien inferiormente por $f(a) - \epsilon$.

Problema 3.7.2 (P3 C3 1997 parte (2)). Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que satisfacen

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$

a) Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x)(y - x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$.

b) Probar que si g es acotada, entonces f es continua en \mathbb{R} .

c) Probar que si g es continua en a y $a_n \rightarrow a$, con $a_n \neq a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$ existe y vale $-g(a)$.

Solución 3.7.2. a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Claramente $f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$. La otra desigualdad se obtiene intercambiando los valores de x por y en el enunciado.

b) Si g es acotada, entonces $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq M$. Con esto, dado un $\epsilon > 0$, existira un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \max\{g(x), g(y)\}|x - y| \leq M|x - y| < M\delta$, es decir, $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, por lo tanto, f es continua en todo \mathbb{R} .

c) Considerando $y = a_n, x = a$ se tiene que $-g(a_n) \leq \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} \leq -g(a)$, como $g(a_n) \rightarrow g(a)$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = -g(a)$.

Problema 3.7.3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contractante, es decir, Lipschitziana con constante de Lipschitz menor que 1 ($\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$). Demuestre que existe un único punto $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

Solución 3.7.3. Veamos unicidad:

Sean $f(a) = a, f(b) = b$, se tiene que $|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq L|a - b|$. Como $0 < L < 1$, se tiene una contradiccion.

Veamos existencia:

Construyamos una sucesion x_k que converge a un punto fijo de f . Sea $x_1 \in [0, 1]$. Se contruye la sucesion mediante la fórmula de recurrencia: $x_k = f(x_{k-1})$. Esta sucesion verifica:

$$\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= |f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \\
|x_4 - x_3| &= |f(x_3) - f(x_2)| \leq L|x_3 - x_2| \leq L^2|x_2 - x_1| \\
&\vdots \\
|x_{k+1} - x_k| &= |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq \dots \leq L^{k-1}|x_2 - x_1|
\end{aligned}$$

de esta manera, se verifica que para todo $k, p \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x_{k+p} - x_k| \leq |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \leq (L^{k+p-2} + L^{k+p-3} + \dots + L^{k-1})|x_2 - x_1|$, que equivale a la desigualdad $|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2 - x_1|$.

Como $L^{k-1} \rightarrow 0$ se puede verificar que (x_k) es una sucesión de Cauchy, en efecto, dado $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2 - x_1| < \epsilon$, lo que equivale a la definición de sucesión de Cauchy haciendo $j = k + p$. Como toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R} converge y todos los términos de la sucesión están dentro del intervalo, entonces el límite x_0 también está dentro del intervalo. Con esto se tiene que $x_0 = \lim x_k = \lim f(x_{k-1}) = f(x_0)$, donde esta última igualdad viene de la continuidad de f en el intervalo.

Problema 3.7.4. Se define \overline{A} como la adherencia de un conjunto A , es decir, como todos los puntos de \mathbb{R} que pueden ser alcanzados por alguna sucesión de términos en A .

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, con $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto distinto de \mathbb{R} . Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$.

Solución 3.7.4. Sea $x \in \overline{A}$, es decir, existe una sucesión de términos en $(a_n) \subset A$ tales que $a_n \rightarrow x$. Como f es continua en \mathbb{R} , $\lim f(a_n) = f(x)$, pero $f(a_n) = g(a_n)$, es decir, $\lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(x)$, por lo tanto $\forall x \in \overline{A}$, $f(x) = g(x)$.

Problema 3.7.5. Sea $p(x) = x^4 - x^3 - 1$ un polinomio en los reales. Proponga un algoritmo para encontrar las raíces. Encuentre una raíz real en un intervalo de largo 0,002 sabiendo que $p(-1) = 1$ y $p(0) = -1$.

Solución 3.7.5. El algoritmo es el siguiente:

```

epsilon=0.0001;
verificador=0;
Mientras delta>0
    Evaluar p(x) en un valor aleatorio r;
    Evaluar p(x) en otro valor aleatorio s;
    Para N iteraciones
        Si p(r)p(s)<0
            Existe un c en el intervalo (r,s) o (s,r) si r<s o s<r;

```

```

        Si  $|s-r|$  es menor o igual a epsilon
            verificador=1;
        Escoger el r de la proxima iteracion cercano al de esta iteracion.
        Lo mismo para s.
        Si verificador=1, salir del ciclo.
    Devolver el intervalo (r,s)

```

Por lo tanto, si $p(-1) = 1$ y $p(0) = -1$, entonces $p(-1)p(0) < 0$, con lo cual $c \in (-1, 0)$.

Algunas iteraciones del algoritmo son:

$$p(-0,5) = -0,8125 \Rightarrow -1 < c < -0,5$$

$$p(-0,85) = 0,1361 \Rightarrow -0,85 < c < -0,80$$

$$p(-0,81) = -0,003 \Rightarrow -0,82 < c < -0,81$$

$$p(-0,818) = -0,04 \Rightarrow -0,820 < c < -0,818 \text{ Con lo que se tiene el resultado.}$$

3.8. Auxiliar Extra 3

Problema 3.8.1. Calcule:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^n n}{4n + 1}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{3n + 1} \right)^n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^{2n}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$$

Solución 3.8.1. a) Si $n = 2m$, se tiene que $\lim_{2m \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^{2m} 2m}{8m + 1} = \frac{-1}{4}$ y si $n = 2m + 1$, obtenemos $\lim_{2m \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^{2m+1} (2m + 1)}{8m + 5} = \frac{1}{4}$, luego, el limite no es unico y $\mathbb{N} = \{2m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{2m + 1 : n \in \mathbb{N}\}$, por lo tanto no existe el limite.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{3n + 1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n + 1} \right)^n \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n + 1} \right)^{3n+1} \left(1 - \frac{2}{3n + 1} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= (e^{-2} \cdot 1)^{\frac{1}{3}} \\ &= e^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$c) \text{ Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^{2n^2} = e, \text{ se tiene que } \forall \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^{2n^2} - e \right| <$$

ϵ . Tomando $\epsilon = \frac{e}{2}$, se tiene que a partir de un n_0 , $\frac{e}{2} < \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^{2n^2} < \frac{3e}{2}$. Apli-

cando $\sqrt[n]{\cdot}$ se obtiene $\sqrt[n]{\frac{e}{2}} < \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^{2n} < \sqrt[n]{\frac{3e}{2}}$, por el teorema del sandwich,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^{2n} = 1.$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{n} \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Problema 3.8.2. Probar que si u_n satisface $|u_{n+1} - u_n| < q^n$ con $0 < q < 1$ entonces es de Cauchy.

Solución 3.8.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$.

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= |u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - \dots + u_{n+1} - u_n| \\ &\leq |u_m - u_{m-1}| + |u_{m-1} - u_{m-2}| + \dots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^n \\ &= \frac{q^n(1 - q^{m-1-n})}{1 - q} \end{aligned}$$

Como $\frac{q^n(1 - q^{m-1-n})}{1 - q} \rightarrow 0$, se tiene que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0, |u_m - u_n| < \epsilon$.

Problema 3.8.3. Demuestre que una funcion Lipschitziana de constante $L > 0$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$) es continua en \mathbb{R} .

Solución 3.8.3. Tomemos $y = \bar{x}, x = x_n$ con $x_n \rightarrow \bar{x}$. Como $0 \leq |f(x_n) - f(\bar{x})| \leq L|x_n - \bar{x}|$, tendiendo n a ∞ , se obtiene $|f(x_n) - f(\bar{x})| \rightarrow 0$ pues $|x_n - \bar{x}| \rightarrow 0$. Es decir, $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ para cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Problema 3.8.4. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que $\exists \lambda > 0$ tal que $\forall x \in [a, b], f(x) + \lambda < g(x)$.

Solución 3.8.4. La funcion $\psi(x) = g(x) - f(x)$ es continua por ser resta de continuas y cumple con $\psi(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Por el teorema de Weierstrass, ψ alcanza su minimo en $[a, b]$, es decir, $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $\psi(x_0) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a, b]$ lo que equivale a decir $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) - f(x_0) \leq g(x) - f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, tomando $\lambda = \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$, se tiene que $\frac{g(x_0) - f(x_0)}{2} < g(x_0) - f(x_0) \leq g(x) - f(x)$, lo que implica $\forall x \in [a, b], f(x) + \lambda < g(x)$.

Problema 3.8.5. Probar que $h(x) = e^x \cos x + 1$ tiene infinitas raices. HINT: Analizar el intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$.

Solución 3.8.5. Si $n = 2k$, en el intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ se tiene $h(2k\pi) = e^{2k\pi} \cos 2k\pi + 1 = e^{2k\pi} + 1 > 0$ y $h((2k+1)\pi) = e^{(2k+1)\pi} \cos(2k+1)\pi + 1 = 1 - e^{(2k+1)\pi} < 0$. Por el TVI, existe $x_0 \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ tal que $h(x_0) = 0$. Si $n = 2k+1$, se hace lo mismo y se concluye tambien que existe una raiz. Como existen infinitos intervalos $[n\pi, (n+1)\pi]$, deben existir infinitas raices.

Problema 3.8.6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ continua tal que $\forall x \in [a, b] \exists y \in [a, b], f(y) \leq \frac{1}{2}f(x)$. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Solución 3.8.6. Como f es continua en $[a, b]$, alcanza su minimo en ese intervalo. Por contradiccion, supongamos que f es estrictamente positiva. Sea m el valor minimo de

f , es decir, $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = m$, sin embargo, $\exists y \in [a, b]$ que cumple con $f(y) \leq \frac{1}{2}f(x_0) < f(x_0)$, es decir, $f(y) < m$, con lo que m no es el minimo alcanzado. Contradiccion. Por lo tanto, como f no es estrictamente positiva, debe alcanzar el valor 0, es decir, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Problema 3.8.7. Sea $f : [0, 2a] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists c \in [0, 2a]$ tal que $f(c) = f(c + a)$.

Solución 3.8.7. Definimos $F(x) = f(x) - f(x + a)$. F es continua por ser resta y composicion de funciones continuas. $F(0) = f(0) - f(a) = f(2a) - f(a)$, $F(a) = f(a) - f(2a)$, luego $F(0)F(a) = -(f(2a) - f(a))^2 \leq 0$. Por TVI, existe $c \in [0, a]$ tal que $F(c) = 0$, es decir, $f(c) - f(c + a) = 0$.

Problema 3.8.8. Sea F una funcion continua en $[a, b]$ y sean $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $\sum_{i=1}^n a_i F(x_i) = F(x_0) \sum_{i=1}^n a_i$.

Solución 3.8.8. Queremos probar que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^n a_i F(x_i) = F(x_0) \sum_{i=1}^n a_i$$

Definimos $G(x) = \sum_{i=1}^n a_i F(x_i) - F(x) \sum_{i=1}^n a_i$. G es continua en $[a, b]$ por algebra de funciones continuas. Como F es continua, alcanza su maximo y minimo en $[a, b]$, es decir, existen $x_{max}, x_{min} \in [a, b]$ tales que $\forall x \in [a, b], F(x) \geq F(x_{min}) \wedge F(x) \leq F(x_{max})$, en particular, $F(x_i) \geq F(x_{min}) \wedge F(x_i) \leq F(x_{max})$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Evaluando G en esos puntos se tiene que $G(x_{max}) = \sum_{i=1}^n a_i (F(x_i) - F(x_{max})) \leq 0$ y $G(x_{min}) = \sum_{i=1}^n a_i (F(x_i) - F(x_{min})) \geq 0$, luego $G(x_{max})G(x_{min}) \leq 0$, por TVI, existe $x_0 \in [x_{min}, x_{max}]$ o $x_0 \in [x_{max}, x_{min}]$ tal que $G(x_0) = 0$.

Problema 3.8.9. Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+bx)^2 - a^2}{x} & x < 0 \\ 5\sqrt{2} & x = 0 \\ \frac{1 - \cos(ax)}{bx^2} & x > 0 \end{cases}$

sea continua en \mathbb{R} . HINT: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Solución 3.8.9. La funcion es continua por pedazos, es decir, es continua en $(0, \infty)$ y en $(-\infty, 0)$ (por algebra de funciones continuas). Veamos $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(a+bx)^2 - a^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2ab + x \\ &= 2ab \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(ax)}{bx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2}{b} \frac{1 - \cos(ax)}{a^2 x^2} \\ &= \frac{a^2}{b} \end{aligned}$$

Para que sea continua en cero, se debe tener que:

$$\begin{aligned}2ab &= 5\sqrt{2} \\ \frac{a^2}{b} &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Lo que implica que $b = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$ y $a = 4 \left(\frac{5\sqrt{2}}{8} \right)^{\frac{2}{3}}$.