

Curvas

Definición de curva

La forma más general de describir una curva es verla como un par de funciones que dependen de algún parámetro, que usualmente llamaremos t que pertenece a un intervalo (abierto o cerrado) de los reales. De esta forma, la trayectoria de la curva será el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano que se escriban de la forma $(x(t), y(t))$, esta función recibe el nombre de *parametrización*. De manera formal podemos llamar *curva* a una función continua (parametrización):

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Ejemplos

Coordenadas rectangulares el parámetro corresponde a la coordenada de las abscisas con lo cual la parametrización corresponde a $(x, f(x))$.

Coordenadas polares: el parámetro es ángulo formado con el eje de las con lo cual la parametrización es $(\underbrace{\rho(\theta) \cos(\theta)}_{x(\theta)}, \underbrace{\rho(\theta) \sin(\theta)}_{y(\theta)})$

Largo de una curva

Coordenadas paramétricas	Coordenadas rectangulares	Coordenadas polares
$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$	$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$	$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$

Momentos de Inercia

	Coordenadas rectangulares	Coordenadas polares
Respecto del eje OX	$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$	$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta) \cos(\theta) \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$
Respecto del eje OY	$\int_{x_0}^{x_1} x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$	$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta) \sin(\theta) \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$

Centros de masa

$$x_0 = \frac{M_{OY}}{Largo} \quad y_0 = \frac{M_{OX}}{Largo}$$

Superficies

Área bajo una curva

Coordenadas rectangulares	Coordenadas paramétricas
$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$	$\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t) dt$

Área de un sector

Coordenadas paramétricas	Coordenadas polares
$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt$	$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2 d\theta$

Superficies de revolución con respecto al eje OX

Coordenadas paramétricas	Coordenadas rectangulares	Coordenadas polares
$2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$	$2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$	$2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta) \sin(\theta) \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$

Momentos de Inercia

	Coordenadas rectangulares	Coordenadas polares
Respecto del eje OX	$\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(x)^2 - g(x)^2 dx$	$\frac{1}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^3 \cos(\theta) d\theta$
Respecto del eje OY	$\int_{x_0}^{x_1} x(f(x) - g(x)) dx$	$\frac{1}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^3 \sin(\theta) d\theta$

Centros de masa

$$x_0 = \frac{M_{OY}}{Area} \quad y_0 = \frac{M_{OX}}{Area}$$

Volúmenes

De manera general cada vez que al realizar un corte transversal sobre un eje, es decir, "cortar por una variable se pueda medir el área de dicha sección (digamos $A(z)$) se tiene que el volumen es $:\int_{z_0}^{z_1} A(z) dz$.

Volúmenes de revolución

	Coordenadas rectangulares	Coordenadas polares
Rotación eje OX	$\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)^2 dx$	$\frac{2}{3} \pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^3 \sin(\theta) d\theta$
Rotación eje OY	$2\pi \int_{x_0}^{x_1} x f(x) dx$	$\frac{2}{3} \pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^3 \cos(\theta) d\theta$

Integrales impropias

Primera Clase

Son las integrales de la forma: $\int_a^\infty f(x) dx$. Formas de determinar su existencia

Por definición:

Si existe el límite: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$

Comparación:

Si f y g funciones no negativas tales que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$ entonces

- Si $\int_a^\infty g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ converge.
- Si $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x) dx$ diverge.

Convergencia absoluta:

Si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ converge.

Test μ :

Si el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\mu f(x)$ existe $\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \mu > 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \text{ converge.} \\ \text{Si } \mu \leq 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \text{ diverge.} \end{cases}$

El resultado anterior viene del criterio de comparación junto con el hecho que:

$\int_a^\infty \frac{1}{x^\mu} dx \begin{cases} \text{converge si } \mu > 1. \\ \text{diverge si } \mu \leq 1. \end{cases}$

Segunda Clase

Son las integrales de la forma: $\int_a^b f(x) dx$ donde f posee una asíntota vertical en b por la izquierda (todos los cálculos son análogos en el caso de una asíntota vertical por la derecha). Formas de determinar su existencia

Por definición:

Si existe el límite: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$

Comparación:

Si f y g funciones no negativas tales que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ entonces

- Si $\int_a^b g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ converge.
- Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ diverge.

Test μ :

Si el límite $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\mu f(x)$ existe \Rightarrow $\begin{cases} \text{Si } 0 < \mu < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge.} \\ \text{Si } \mu \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ diverge.} \end{cases}$

El resultado anterior viene del criterio de comparación junto con el hecho que:

$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\mu} dx \begin{cases} \text{converge si } 0 < \mu < 1. \\ \text{diverge si } \mu \geq 1. \end{cases}$

Series

Series de términos no-negativos

Definición

Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si existe $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n$.

Prop

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} a_n = 0$

Comparación:

Si a_n y b_n sucesiones no negativas tales que $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces

- Si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
- Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

Criterio asintótico:

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L$

- Si $L \neq 0$ entonces las series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergen ambas o divergen ambas.
- Si $L = 0$ entonces si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Criterio del cociente y la raíz:

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = L$ ó $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \Rightarrow \begin{cases} L < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \\ L > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ diverge} \\ L = 1 \Rightarrow ? \end{cases}$

Criterio de la integral:

Si f continua decreciente y positiva entonces $\int_1^{\infty} f(x) dx$ existe $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge.

De aqui se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^p} \begin{cases} \text{converge si } p > 1. \\ \text{diverge si } p \leq 1. \end{cases}$

Series de términos cualquiera

Convergencia absoluta:

Si $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

Criterio de Leibniz:

Si la sucesión $\{a_k\} \downarrow 0$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge.