

# MA12A - Calculo

## Clase Auxiliar

Profesor: Martin Matamala

8 de Septiembre de 2003

### Probema 1

Calcular primitivas para las siguientes funciones

$$f(x) = \int \frac{1+x}{2+x} \quad g(x) = \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

### Solucion Probema 1

(1)

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x}{2+x} &= \int \frac{1+x+(1)+(-1)}{2+x} = \int 1 - \int \frac{1}{2+x} \\ &= x - \ln(2+x) + C \end{aligned}$$

(2)

Haciendo integracion por partes, tomando  $f' = 1$  y  $g = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \int x \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{1+x})}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\end{aligned}$$

Por otro lado, para calcular  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}$  hacemos un cambio de variable  $x = u^2$ , y nos queda:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} &= \int \left( \frac{u}{1+u^2} 2u \right) = 2 \int \frac{u^2}{1+u^2} \\ &= 2 \int 1 - 2 \int \frac{1}{1+u^2} \\ &= 2u - 2 \arctan(u)\end{aligned}$$

que volviendo a la variable original  $u = \sqrt{x}$ , queda:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x}$$

y entonces tenemos:

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$$

## Problema 2

Utilice un cambio de variable en donde  $\tan \frac{x}{2} = u$  para calcular la siguiente primitiva:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}$$

## Solucion Problema 2

Primero intentaremos dejar la expresion original en terminos de  $\tan \frac{x}{2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1} \\ &= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}} = \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Ahora podemos hacer el cambio de variable (el cual es  $x = 2 \arctan u$ ), por lo que nos queda:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} = \int \frac{u}{1 + u} \frac{2}{1 + u^2}$$

Esta ultima primitiva la calcularemos usando fracciones parciales, es decir

$$\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} = \frac{(A+B)u^2 + (B+C)u + (A+C)}{(1+u)(1+u^2)}$$

de donde, imponiendo que  $(A+B)u^2 + (B+C)u + (A+C) = 2u$ , resulta:

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} &= -\int \frac{1}{1+u} + \int \frac{u+1}{1+u^2} \\ &= -\ln(1+u) + \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} + \int \frac{1}{1+u^2} \\ &= -\ln(1+u) + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \arctan u\end{aligned}$$

que volviendo a la variable original ( $\tan \frac{x}{2} = u$ ) y a la primitiva original, queda:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} = -\ln\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} + C$$

### Problema 3

Calcular:

$$\int x(1+x^2)e^{-x^2}$$

### Solucion Problema 3

Primero notemos que:

$$\int x(1+x^2)e^{-x^2} = \int xe^{-x^2} + \int x^3e^{-x^2}$$

La primera primitiva:

$$\int xe^{-x^2} = -\frac{1}{2} \int (-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \int (e^{-x^2})' = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

La segunda primitiva (por partes con  $f = x^2$ ,  $g' = xe^{-x^2}$ ):

$$\begin{aligned}\int x^3e^{-x^2} &= \int x^2(xe^{-x^2}) = x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) - \int 2x\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int (-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int x(1+x^2)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C$$