

PAUTA N° 4 - MA 12A CALCULO

Problema 1.-

1.- Calculemos $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} x \ln x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ de modo que se puede aplicar l'Hôpital y obtenemos

$$(x \ln x)' = \ln x + 1 \quad (x - 1)' = 1$$

y entonces

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

por lo tanto $\alpha = 1$

como en $x \neq 1$ la función es el cuociente y producto de funciones continuas. La función misma es continua.

2.- Para $x \neq 1$ y $x > 0$ sabemos que la derivada existe pues es el cuociente y producto de funciones derivables. En este caso $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(x-1)-x \ln x}{(x-1)^2}$

Para $x = 1$ debemos calcular f' por definición.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x \ln x}{(x-1)} - 1}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$$

como $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln x - (x-1) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ podemos aplicar l'Hôpital y obtenemos.

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\ln x-1}{2(x-1)}$: otra vez $\ln x \rightarrow 0$ y $(x-1) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 1$ por lo tanto aplicamos l'Hôpital

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{2(1)} = 1/2$$

3.- Veamos cuanto vale $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}$

$$\text{l'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-1/x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x(x-1)} = 1/2$$

luego f' es continua en 1. Además para $x \neq 1$ $f'(x) = \frac{(x-1)-\ell n x}{(x-1)^2}$ que es continua por ser producto, resta y cuociente de funciones continuas.

$$4.- (x-1)f(x) = x \ell n x \setminus ()^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(k)} \ell n^{(n-k)} x$$

$$(x-1)f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) = x \ell n^{(n)} x + n \ell n^{(n-1)}(x) \quad x \rightarrow 1$$

$$n f^{(n-1)}(1) = \ell n^{(n)}(1) + n \ell n^{(n-1)}(1)$$

$$\ell n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(1) &= \frac{1}{n} \left((-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{1} + n(-1)^{1-2} \frac{(n-2)!}{1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{1-2} (n-2)!}{n} [- (n-1) + n] \\ &= \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.- f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2} + f'''(1) \frac{(x-1)^3}{3!} \\ &= 1 + 1/2(x-1) - \frac{(x-1)^2}{3!} + \frac{2(x-1)^3}{4!}. \end{aligned}$$

Problema 2.- $f(x) = e^{1/\ell n x}$.

1.- Como $\ell n x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y está definida para $x > 0$, el dominio de f es $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Por lo mismo f no es par ni impar.

Si $x \rightarrow +\infty, \ell n(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\ell n x} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$. Por lo que hay una asíntota horizontal $y = 1$ para $x \rightarrow +\infty$. Entonces no existe asíntotas oblicuas propias ($m \neq 0$).

Si $x \rightarrow 0^+, \ell n(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{\ell n x} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$. Así, no hay asíntotas verticales en $x = 0$.

Si $x \rightarrow 1^-$, $\ln(x) \rightarrow 0^-$, $\frac{1}{\ln x} \nearrow -\infty \rightarrow f(x) \rightarrow 0$. Además, si $x \rightarrow 1^+$, $\ln x \rightarrow 0^+$

$\frac{1}{\ln x} \nearrow +\infty \Rightarrow f(x) \nearrow +\infty$ con lo cual existe una asíntota vertical en $x = 1$.

$f'(x) = e^{1/\ln x} \cdot \frac{-1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}$. Como $x > 0$ $f'(x) < 0$. Por lo tanto f decrece en los intervalos $]0, 1[$ y $]1, +\infty[$. Como no está definida en cero no posee máximo local. Además como es decreciente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ y en 1 no está definida, no posee máximo local.

$$f'(x) = e^{1/\ln x} \left[\frac{1}{x^2 \ln^4 x} + \frac{\ln^2 x + 2(\ln x)x/x}{x^2 \ln^4 x} \right] = \frac{e^{1/\ln x}}{x^2 \ln^4 x} (1 + \ln x)^2 \geq 0.$$

f es convexa en $]0, 1[$ y $]1, +\infty[$ y no posee punto de inflexión. Además no posee ceros y es siempre positiva. Debido a su decrecimiento, a que $f(]0, 1[\subseteq]0, 1]$ y a que $f(]1, +\infty[) \subseteq]1, +\infty[$ no puede ser periódica. Por otra parte recorre $\mathbb{R}_+^* \setminus \{0, 1\}$

Gráfica

2.- $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)$. Como $\frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow 1$, $\ln\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) \rightarrow 0$ y $x^2 \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$, podemos aplicar l'Hôpital.

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\text{sen } x} \cdot \left(\frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \text{sen } x}{2x^2 \text{sen } x}.$$

Aplicando esta vez l'Hôpital,

$$x \cos x - \text{sen } x \rightarrow 0 \text{ y } 2x^2 \text{sen } x \rightarrow 0$$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \text{sen } x - \cos x}{4x \text{sen } x + 2x^2 \cos x}. \text{ Dividiendo por } x \text{sen } x, \ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 + \frac{2x}{\text{sen } x} \cdot \cos x} = -\frac{1}{6}$$

Problema 3.-

1.- La recta tangente a f en c es $L : y - f(c) = f'(c)(x - c)$. Queremos que L pase por el origen, de un modo que c debe satisfacer, $cf'(c) = f(c)$.

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, como $a > 0$ sabemos que en $[a, b]$ g es continua y en $]a, b[$ derivable.

Además $g(a) = g(b) = 0$, de modo que existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$ (Teo de Rolle).

Volviendo a f obtenemos que $g'(x) \Big|_c = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \Big|_c = 0$. Así $cf'(c) = f(c)$.

Si $a = 0$ podemos hacer algo análogo definiendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/x & b \geq x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ corresponde a $f'(0) = 0$. Luego g es continua en $]0, b[$. Por lo que es posible aplicar el razonamiento anterior.

2.-

$$L : ay + bx = ab$$

$$ar + bh = ab \text{ y } h = \frac{ab-ar}{b} = \frac{a}{b}(b-r)$$

$$\text{El volumen del cilindro es: } V = \pi r^2 h$$

$$\text{que en términos de } r \text{ se expresa como } V = \frac{\pi a}{b}(b-r)r^2$$

llamemos $c = \frac{\pi a}{b}$ $V = c(b-r)r^2$. Los candidatos a máximo son:

$$V'(r) = 0 \text{ o } r = a, r = 0, \text{ es decir, } V'(r) = c[2(b-r)r - r^2] = cr[2b - 3r]$$

$$\text{luego } \left\{\frac{2}{3}b, a, 0\right\} \text{ como } V(a) = V(0) = 0 \text{ y } V\left(\frac{2}{3}b\right) = c\frac{b}{3} \frac{4b^2}{9} = \frac{4}{27}cb^3$$

$$\text{el volumen máximo es } \frac{4}{27}\pi ab^2$$

ahora $a + b = 1$ luego el volumen máximo es

$$V(a) = \frac{4}{27}\pi a(1-a)^2. \text{ Así } V'(a) = \frac{4}{27}\pi[(1-a)^2 - ra(1-a)] = \frac{4}{27}\pi(1-a)[(1-a) - 2a] = \frac{4}{27}\pi(1-a)(1-3a) \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad V(1/3) = \frac{4}{27}\pi \frac{1}{3} \frac{4}{9} = \frac{\pi 16}{(27)^2}$$