

Problema 2:

Pruebe que la función $f(x) = e^x \cos(x) + 1$ tiene infinitos ceros.

Solución Problema 2:

Tenemos dos formas de demostrar esto:

Forma 1:

Sea $k \in \mathbb{N}$, probaremos que existe al menos un cero de f en el intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$.

En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(2k\pi) &= e^{2k\pi} \cos(2k\pi) + 1 = e^{2k\pi} + 1 > 0 \\ f((2k+1)\pi) &= e^{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\pi) + 1 = -e^{2k\pi} + 1 < 0 \end{aligned}$$

El signo de la segunda evaluación de la función proviene del hecho que $\forall x > 0 : e^x > 1$.

Luego en el intervalo $I_k = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ la función debe tener al menos una raíz pues los signos de las imágenes de los extremos son distintos (por continuidad, es decir TVI, se tiene la raíz).

Como los intervalos I_k son infinitos (para cada valor de k existe uno) y además son todos disjuntos, entonces la función tiene infinitas raíces.

Forma 2: (un poco más conceptual)

Probaremos que:

1. f tiene al menos una raíz
2. $x_0 > 0 : f(x_0) = 0 \Rightarrow \exists x_1 > x_0 : f(x_1) = 0$.

Es claro que (1) y (2) concluyen que la función tiene infinitas raíces.

1. Basta tomar el intervalo $[0, \pi]$, pues $f(0) = 2 > 0 \wedge f(\pi) = 1 - e^\pi < 0$, luego hay al menos una raíz en el interior del intervalo.
2. Supongamos que tenemos $x_0 > 0 : f(x_0) = 0$

$$\text{Sea } a = \min\{x \in \mathbb{R} : x > x_0 \wedge \cos(x) = -1\}$$

Es claro que a existe pues el coseno acumula en todo \mathbb{R} . Otra forma de ver a es como el primer número de la forma $(2k+1)\pi$ que es mayor que x_0 .

$$\text{Sea } b = \min\{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge \cos(x) = 1\}$$

Entonces ahora podemos decir fácilmente (ejercicio) que $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$.

Luego existe un $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.

Notar que como $x_1 > 0 \Rightarrow x_1 > x_0$.

Problema 3:

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua tal que:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{n}\right) &\uparrow +\infty \\ g(n) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pruebe que g es sobreyectiva.

Solución Problema 3:

Probaremos que $\forall y \in (0, +\infty) : \exists x \in (0, +\infty) : g(x) = y$.

En efecto, sea $y \in (0, +\infty)$.

Como $g\left(\frac{1}{n}\right) \uparrow +\infty$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \quad g\left(\frac{1}{n}\right) > y$.

Luego definamos $x_0 = \frac{1}{n_0}$ es decir $\boxed{g(x_0) > y}$ (1)

Con $g(n) \rightarrow 0$, tomando $\varepsilon = y$, sabemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1 \quad g(n) < y$.

Luego definamos $x_1 = n_1$ es decir $\boxed{g(x_1) < y}$ (2)

Tomando la función $h(x) = g(x) - y$ se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} (1) : h(x_0) &> 0 \\ (2) : h(x_1) &< 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists x \in (x_0, x_1) : h(x) = 0 \Rightarrow \boxed{g(x) = y}$$

Problema 4:

Sea A_n acotada y f continua tal que $f(A_n) \rightarrow \alpha$, pruebe que:

$$f \text{ inyectiva} \Rightarrow A_n \text{ convergente.}$$

Solución Problema 4:

Sabemos que como A_n es acotada entonces tiene al menos un punto de acumulación.

Probaremos que A_n no puede tener más de uno. En efecto, si a_1, a_2 son puntos de acumulación, entonces $\exists A_{f(n)}, A_{g(n)}$ subsucesiones de A_n convergentes a a_1 y a_2 respectivamente. Pero entonces como f es continua entonces:

$$\begin{aligned} f(A_{f(n)}) &\rightarrow f(a_1) \\ f(A_{g(n)}) &\rightarrow f(a_2) \end{aligned}$$

Pero como las anteriores son subsucesiones de $f(A_n)$ entonces deben converger al igual que ella a α . Es decir: $f(a_1) = f(a_2) = \alpha$, pero como f es inyectiva $\Rightarrow a_1 = a_2$.

Entonces A_n no puede tener dos puntos de acumulación distintos, es decir, A_n tiene un único punto de acumulación, por lo tanto converge.