

Problema 1:

Sea $A_n \rightarrow a$, $B_n \rightarrow b$.

Estudie la convergencia de: $C_n = \max\{A_n \cdot B_n, \max\{A_n, B_n\}\}$

Solución Problema 1:

Primero probaremos que la sucesión $H_n = \max\{A_n, B_n\} \rightarrow \max\{a, b\}$.

Caso $a > b$:

Definamos $\varepsilon_1 = \frac{(b-a)}{2}$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad |A_n - a| < \frac{(a-b)}{2} \Rightarrow \frac{(a+b)}{2} < A_n$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \quad |B_n - b| < \frac{(a-b)}{2} \Rightarrow B_n < \frac{(a+b)}{2}$$

Entonces:

$$\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\} \text{ se tiene que } B_n < A_n \Rightarrow C_n = A_n$$

Luego, $\boxed{H_n \rightarrow a = \max\{a, b\}}$

Caso $a < b$: Análogo.

Caso $a = b = l$:

Sea $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad |A_n - l| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \quad |B_n - l| < \varepsilon$$

Entonces:

$$\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\} \text{ se tienen ambas desigualdades.}$$

Por lo tanto $|H_n - l| < \varepsilon$ también.

Es decir, $\boxed{H_n \rightarrow l = a = b = \max\{a, b\}}$

Usando lo anterior, es decir

$$A_n \rightarrow a, B_n \rightarrow b \Rightarrow \max\{A_n, B_n\} \rightarrow \max\{a, b\}$$

se puede probar directamente que $C_n \rightarrow \max\{ab, \max\{a, b\}\}$ (propuesto)

Problema 4: (números de fibonacci)

Sea a_n una sucesión definida por la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 \\a_1 &= 1 \\ \forall n > 1: a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}\end{aligned}$$

Pruebe que la sucesión definida diverge a $+\infty$.

Hint: pruebe que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \geq n$.

Solución Problema 4:

Breve vistazo a los números:

| | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a_n | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 |

Ahora, claramente por la forma de la recurrencia, la sucesión es **creciente** ya que el término general es igual al anterior mas un termino no negativo, pues es fácil probar que los números de fibonacci son todos no negativos.

Por lo tanto podemos concluir que $\forall n > 0 : a_n \geq 1$.

Ahora, intuyendo de la tabla anterior, probaremos por inducción que $\forall n \geq 5 : a_n \geq n$

1. Caso base $n = 5$, se tiene pues $a_5 = 5$.

2. Supongamos que tenemos n tal que $a_n \geq n$, veamos que entonces $a_{n+1} \geq n+1$

En efecto, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq n + a_{n-1} \geq n+1$

Entonces:

$$\boxed{\forall n \geq 5 : a_n \geq n}$$

Ahora, si queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 : a_n > L$, basta con encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1 : n > L$, y entonces tomamos $n_0 = \max(5, n_1)$.

Ahora, $n_1 \in \mathbb{N}$ es fácil de escoger, basta tomar $n_1 = \lfloor L \rfloor + 1$.

Entonces tenemos $n_0 = \max(5, \lfloor L \rfloor + 1)$, por lo que podemos concluir que efectivamente

$\forall n \geq n_0 : a_n > L$ y entonces a_n diverge a $+\infty$.

Problema 3:

Pruebe que las siguientes sucesiones divergen a $+\infty$.

$$b_n = \frac{n^a + 1}{n^b + 1} \quad a, b \in \mathbb{N} \quad a > b$$

Solución Problema 3:

Debemos probar que: $\forall L > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{\forall n \geq n_0 : b_n > L}$

Primero que nada vamos a factorizar b_n de la siguiente manera:

$$b_n = \frac{n^a + 1}{n^b + 1} > \frac{n^a}{n^b + 1} > \frac{n^a}{n^b + n^b} = \frac{n^{a-b}}{2}$$

Es decir, nuestra sucesión b_n es mayor que la sucesión $\frac{n^{a-b}}{2}$

Por lo que basta encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 : \frac{n^{a-b}}{2} > L$, para lo cual podemos

tomar $n_0 = \left\lceil (2L)^{\frac{1}{a-b}} \right\rceil + 1$, y entonces se cumple que:

$$\boxed{\forall n \geq n_0 : b_n > L}$$

Problema 1:

Analice la convergencia (calcule) de las siguientes sucesiones:

$$\left(\frac{3n^2 + n + 2}{3n^2 + n} \right)^{1+n^2}, \quad \left(\frac{n^2 - 1}{3n^2 - 2n + 3} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{n^2 - 1}{3n^k - 2n + 3} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (k > 2)$$

Solución Problema 1:

$$\text{a) } \left(\frac{3n^2 + n + 2}{3n^2 + n} \right)^{1+n^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3n^2 + n + 2}{3n^2 + n} \right)^{1+n^2} &= \left(1 + \frac{2}{3n^2 + n} \right)^{1+n^2} \\ &= \left[\left(1 + \frac{2}{3n^2 + n} \right)^{3n^2 + n} \cdot \left(1 + \frac{2}{3n^2 + n} \right)^{-n} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3n^2 + n} \right) \end{aligned}$$

Ahora: $1 < \left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right)^n < \left(1 + \frac{2}{3n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{2}{3n^2}\right)^{3n^2}\right]^{\frac{1}{3n}} \rightarrow 1$

Por sandwich $\left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right)^n \rightarrow 1 \Rightarrow \boxed{\left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right)^{-n} \rightarrow 1}$

Además $\boxed{\left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right) \rightarrow 1}$

Entonces $\left[\left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right)^{3n^2 + n} \cdot \left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right)^{-n}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3n^2 + n}\right) \rightarrow [e^2 \cdot 1]^{\frac{1}{3}} \cdot 1$

Es decir: $\boxed{\left(\frac{3n^2 + n + 2}{3n^2 + n}\right)^{1+n^2} \rightarrow e^{\frac{2}{3}}}$

b) $\left(\frac{n^2 - 1}{3n^2 - 2n + 3}\right)^{\frac{1}{n}}$

Sabemos que si $A_n \rightarrow l > 0$, entonces $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow 1$.

Por lo tanto, como $\left(\frac{n^2 - 1}{3n^2 - 2n + 3}\right) \rightarrow \frac{1}{3}$

Entonces $\boxed{\left(\frac{n^2 - 1}{3n^2 - 2n + 3}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1}$

c) $\left(\frac{n^2 - 1}{3n^k - 2n + 3}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (k > 2)$

Aquí no podemos usar el mismo criterio pues $\left(\frac{n^2 - 1}{3n^k - 2n + 3}\right) \rightarrow 0$, pero podemos hacer lo siguiente:

$$\left(\frac{n^2 - 1}{3n^k - 2n + 3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^k \cdot \left(3 - \frac{2}{n^{k-1}} + \frac{3}{n^k}\right)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{k-2}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n^{k-1}} + \frac{3}{n^k}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Aplicando el criterio de la parte b) al lado derecho y recordando que:

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n^{k-2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{k-2}} \rightarrow 1$$

$$\boxed{\left(\frac{n^2-1}{3n^k-2n+3}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1}$$