

Problema 1:

Pruebe que las siguientes sucesiones convergen a cero:

$$\frac{1}{n + \sqrt{n}}, \quad \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}, \quad \frac{n+1}{n^4 - n + 1}$$

Solución Problema 1:

a) $\frac{1}{n + \sqrt{n}}$

Debemos probar que: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{\forall n \geq n_0 : \frac{1}{n + \sqrt{n}} < \varepsilon}$ (*)

Ahora, una forma de resolver esto sería, a partir de la inecuación (*) encontrar una condición de tipo $n > f(\varepsilon)$, y entonces escoger $n_0 = \lfloor f(\varepsilon) \rfloor + 1$. Pero despejar el valor de n puede ser engorroso. Mejor, notemos que $\frac{1}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{n}$.

Es decir, si encontramos n_0 que cumpla que $\forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon$, entonces ese mismo n_0 cumple (*) por transitividad del orden.

Ahora, de esta manera $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, cumple que $\forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Luego, con este valor de n_0 se cumple que: $\boxed{\forall n \geq n_0 : \frac{1}{n + \sqrt{n}} < \varepsilon}$

Por lo tanto, la sucesión converge a cero.

b) $\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}$

Primero veamos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}} &= (\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}} \\ &= \frac{(n^2 + \sqrt{n}) - (n^2 - \sqrt{n})}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}} \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{n - \frac{1}{\sqrt{n}}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}} \right]} < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Es decir:

$$\boxed{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Ahora, como siempre, dado un ε , queremos encontrar un n_0 tal que la sucesión sea menor que ε (se está omitiendo el modulo cuando la sucesión es siempre positiva).

Al igual que en el problema anterior basta encontrar un n_0 tal que:

$$\forall n \geq n_0 : \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

Es decir:

$$n_0 = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$$

Ahora, este n_0 cumple que $\forall n \geq n_0 : \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Luego, con este valor de n_0 se cumple que: $\boxed{\forall n \geq n_0 : \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}} < \varepsilon}$
 Por lo tanto, la sucesión converge a cero.

b) $\frac{n+1}{n^4 - n + 1}$

Al igual que en los otros problemas, primero acotaremos nuestra sucesión por una mas simple.

$$\frac{n+1}{n^4 - n + 1} < \frac{n+1}{n^4 - n} < \frac{2n}{n^4 - n} = \frac{2}{n^3 - 1}$$

es decir:

$$\boxed{\frac{n+1}{n^4 - n + 1} < \frac{2}{n^3 - 1}}$$

Por lo tanto, dado ε , encontramos n_0 tal que $\forall n \geq n_0 : \frac{2}{n^3 - 1} < \varepsilon$

$$\Rightarrow n_0 = \left\lfloor \sqrt[3]{1 + \frac{2}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1.$$

Con esto, se tiene que: $\forall n \geq n_0 : \frac{n+1}{n^4 - n + 1} < \varepsilon$ y entonces la sucesión converge a cero.

Problema 2:

Sea $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\forall x \in \mathfrak{R} : 0 < f(x) < |x|$. Pruebe que $f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$.

Solución Problema 2:

Aquí tenemos directamente la cota superior para la sucesión $f\left(\frac{1}{n}\right)$, pues:

$$0 < f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Además:

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$$

Usando la cota de la primera inecuación, sabemos que:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$$

Por lo tanto, dado $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, se tiene que $\forall n \geq n_0 : f\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$.

Es decir $f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$.