

Auxiliar 02/04/2004

Juan Ignacio Saba  
MA12A

P1] Encuentra los valores de  $a \in \mathbb{R}$  tales que la solución a la inequación

$$| |x| - a | < 1$$

es vacía.

P2] Sean  $x, y > 0$  tales que

$$\forall b > 1 \quad x < b \cdot y$$

Pruebe que  $x \leq y$ .

P3] Sea  $b \in \mathbb{R}$ , definimos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad x < b + \varepsilon\}$$

1) Pruebe que  $A$  es acotado superiormente

2) Pruebe que  $A$  tiene supremo y que  $\sup(A) = b$ .

3) ¿Existe máximo en  $A$ ?

Auxiliar 02/04/2004

Solución

P1) Para que

$$||x| - a| < 1$$

tenga solución vacía, basta encontrar los valores de  $a \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad ||x| - a| \geq 1}$$

Definamos como  $S$  el conjunto solución que nos proponemos encontrar, es decir:

$$S = \{a \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R} \quad ||x| - a| \geq 1)\}$$

es decir:

$$S = \{a \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| - a \geq 1 \vee |x| - a < -1)\}$$

es decir:

$$S = \underbrace{\{a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| - a \geq 1\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| - a < -1\}}_{S_2}$$

Ahora, calcularemos  $S_1$  y  $S_2$  por separado.

$$S_1 = \{a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq a+1\}$$

Para que  $|x| \geq a+1$  se cumpla  $\forall x \in \mathbb{R}$  DEBE cumplirse que  $a+1 \leq 0$ . Esto es por si  $a+1 > 0$  entonces podemos decir que  $\exists x = \left(\frac{a+1}{2}\right)$  tal que

$$|x| = \left|\frac{a+1}{2}\right| = \frac{a+1}{2} < a+1$$

es decir:

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x| < a+1$$

lo cual es negar la proposición original

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq a+1$$

Luego, si  $a+1 > 0 \Rightarrow a \notin S_1$ .

¿Que pasa si  $a+1 \leq 0$ ? ( $a \leq -1$ )

Para  $a \leq -1$ , tenemos:

$$a+1 \leq 0 \Rightarrow \text{como } |x| \geq 0 \Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq a+1}$$

Luego:

$$\boxed{S_1 = (-\infty, -1]}$$

$$S_2 = \{a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq a-1\}$$

Aquí tenemos que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } x < y$$

Lo anterior solo viene del hecho que los reales NO son acotados superiormente, luego:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } x > a-1$$

Como  $x \in \mathbb{R}^+$ , también se cumple que:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } |x| > a-1} \quad (*)$$

que es exactamente la negación de

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |x| \leq a-1$$

es decir:

$$(*) \Leftrightarrow \overline{\exists a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } a \in S_2}$$

es decir:

$$\boxed{S_2 = \emptyset}$$

luego, la solución del problema original es:

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$\Rightarrow \boxed{S = (-\infty, -1]}$$

P2 Tenemos  $x, y > 0$  (fijos) y tenemos:

$$\boxed{\forall b > 1 \quad x < b \cdot y} \quad (*)$$

queremos demostrar que  $x \leq y$  necesariamente.

Dem Por contradicción (Version corta!!)

Supongamos que no es cierto que  $x \leq y$ , es decir, supongamos que  $x > y$ .

$$\Rightarrow x \cdot y^{-1} > 1$$

Luego, definamos  $\boxed{b_0 = x \cdot y^{-1}}$ .

es decir, tenemos que:

$$\boxed{b_0 > 1 \quad \wedge \quad b_0 \cdot y = x}$$

lo cual contradice (\*).  $\Rightarrow \nLeftarrow$

Luego, no puede ser que  $x > y$ , es decir:

$$\boxed{\boxed{x \leq y}}$$

Nota: la version larga (vista en clases) es un buen ejercicio de "comprehension".

P3 Para  $b \in \mathbb{R}$  (fijo), definimos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad x < b + \varepsilon\}$$

1)  $A$  es acotado superiormente.

Dem.

Probanemos que  $b$  es una cota superior de  $A$ , es decir:

$$\forall x \in A \quad x \leq b$$

En efecto, (por contradicción) si  $x > b$  podemos elegir:

$$\varepsilon = \frac{x - b}{2} > 0$$

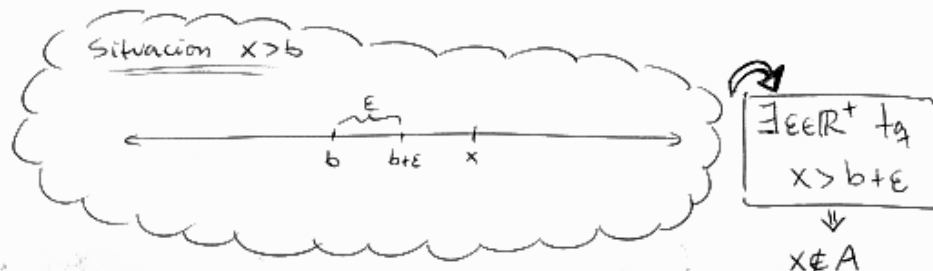
y entonces se tiene:

$$\boxed{x > b + \varepsilon} \quad \leftarrow \text{verificar}$$

luego  $x \notin A$ .

$$\therefore \text{si } x \in A \Rightarrow x \leq b$$

luego  $\boxed{b \text{ es cota superior de } A}$



2)  $A$  tiene supremo y  $\sup(A) = b$ .

Dem.

Como ya sabemos que  $A$  es acotado superiormente, el axioma del supremo nos dice que  $A$  posee supremo.

Para probar que  $\sup(A) = b$ , basta ver que  $b \in A$ .

En efecto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad b < b + \varepsilon$$

luego  $\boxed{b \in A}$

Es decir  $b$  es cota superior de  $A$  pero  $b \in A$ , o sea:

$$\boxed{b \text{ es } \underline{\text{maximo}} \text{ de } A}$$

Tarea: prueben que

$$b = \max(A) \Rightarrow b = \sup(A)$$

3) ¿Existe maximo en  $A$ ?

Ya lo respondimos....

$$\underline{\underline{b = \max(A)}}.$$