Tema 3: Aplicaciones de la diagonalización

1 Ecuaciones en diferencias

Estudiando la cría de conejos, Fibonacci llegó a las siguientes conclusiones:

Una pareja adulta de conejos cría una nueva pareja cada mes y, después de dos meses cada pareja se comporta del mismo modo; por tanto, si disponemos de una pareja de conejos inicialmente, $F_0 = 1$, al cabo de un mes seguiremos teniendo $F_1 = 1$ pareja. Sin embargo, al cabo de dos meses nuestra pareja de conejos, ya adulta, criará una nueva pareja, luego dispondremos de $F_2 = 2$ parejas de conejos. En general, para $n \geq 2$, en el n-ésimo mes dispondremos de

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

parejas de conejos. Es decir, podemos calcular el número de parejas en cada mes si conocemos este número para los dos meses anteriores. Ahora bien, si queremos calcular F_{1000}, deberemos calcular para ello todos los valores de F_n para $n < 1000$, ¿no es posible calcular F_{1000} directamente?, en otras palabras, ¿no es posible obtener una expresión explícita de F_n como función de n? Veamos como hacerlo.

Nuestra ecuación inicial, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, con $n \geq 2$, puede escribirse como

$$\forall n \geq 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

y si añadimos a esta expresión la ecuación (siempre cierta), $F_n = F_n$, obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lclcl} F_{n+1} & = & F_n & + & F_{n-1} \\ F_n & = & F_n & & \end{array}$$

Sea, para cada $n \geq 0$,

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, matricialmente, nuestro sistema se expresa como

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n.$$

Podemos razonar ahora del siguiente modo,

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1 = AA\mathbf{u}_0 = A^2\mathbf{u}_0 \end{array}$$

etcétera. En general, por inducción, obtenemos, considerando $A^0 = I$,

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{u}_n = A^n\mathbf{u}_0.$$

Por tanto, podemos obtener una expresión explícita de $\mathbf{u}_n$, y, en consecuencia de F_n, sin más que calcular las potencias de A. Aquí resulta útil el siguiente resultado

Proposición. 1.1 Sea $A \in \mathcal{M}_p$ diagonalizable y $P \in \mathcal{M}_p$ regular tal que

$$P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

Entonces, para todo $n \geq 0$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p^n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

(Considerando $D^0 = I$).

En nuestro caso particular $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ y, por tanto, los autovalores de A son:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Puesto que los autovalores de A son distintos entre si, A es diagonalizable. Calculando una matriz de paso obtenemos

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, tenemos para $\mathbf{u}_0 = (1,1)$,

$$\mathbf{u}_n = A^n \mathbf{u}_0 = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operando, y teniendo en cuenta que $\lambda_1\lambda_2 = -1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, resulta

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 \\ -1+\lambda_1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2} \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

luego

$$F_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Hemos obtenido así una expresión explícita para F_n. En el resto de la sección intentaremos generalizar los métodos empleados en este ejemplo particular.

Definición. 1.2 Dados $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, $a_p \neq 0$, una ecuación en diferencias lineal y homogénea de orden p es una relación de recurrencia del tipo

$$\forall n > p, \quad z_n = a_1 z_{n-1} + \cdots + a_p z_{n-p}$$

Observemos que una ecuación en diferencias como la de arriba nos permite, dados $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{R}$, definir una sucesión de numeros reales $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. De manera general, el problema que pretendemos resolver es el siguiente:

Dada una ecuación en diferencias: $z_n = a_1 z_{n-1} + \cdots + a_p z_{n-p}$, y los datos iniciales, $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{R}$,

¿Cómo calcular z_n de manera explícita en función de n?

Consideremos, para cada $n \geq p$,

$$\begin{array}{lcccccc} z_n & = & a_1 z_{n-1} & + & \ldots & + & a_p z_{n-p} \\ z_{n-1} & = & z_{n-1} & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ z_{n-p+1} & = & & & & & z_{n-p+1} \end{array}$$

Consideremos ahora la matriz $A \in \mathcal{M}_p$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, si, para cada $n \geq p$, $\mathbf{u}_n = (z_n, z_{n-1}, \ldots, z_{n-p+1})$, tendremos

$$\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}.$$

Vemos, por tanto, que para dar una expresión explícita de z_n, como función de n, basta dar una expresión explícita de $\mathbf{u}_n$, ya que z_n es la primera componente de dicho vector.

Por inducción en p, podemos probar

Proposición. 1.3 El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = (-1)^p(\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p)$$

Definición. 1.4 El polinomio $\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p$ se denomina polinomio característico de la ecuación en diferencias

$$z_n = a_1 z_{n-1} + \cdots + a_p z_{n-p}.$$

Definición. 1.5 Sea $A \in \mathcal{M}_p$ y $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^p$ definidos por

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$$

a partir de cierto vector $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^p$. Una relación de recurrencia de este tipo se denomina un sistema de ecuaciones en diferencias lineal y homogéneo de orden p.

Lema. 1.6 Dada $A \in \mathcal{M}_p$, sea, para cada $n \geq 1$, $\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$, con $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^p$ dado. Entonces,

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{u}_n = A^n\mathbf{u}_0.$$

Esto nos permite dar una expresión explícita de $\mathbf{u}_n$, como función de n, para cada sistema de ecuaciones en diferencias, lineal y homogéneo, sin mas que calcular la potencias de la matriz de coeficientes A. Sin embargo, **caso de ser A diagonalizable** podemos encontrar una expresión más útil en la práctica.

Teorema. 1.7 Sea $A \in \mathcal{M}_p$ diagonalizable y sea $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^P$. Entonces la solución del sistema de ecuaciones en diferencias $\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$ con vector incial $\mathbf{u}_0$, es:

$$\mathbf{u}_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{x}_2 + \cdots + c_p\lambda_p^n\mathbf{x}_p$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ son los autovalores de A, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^p$ son autovectores l.i. asociados a ellos y $(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{R}^p$ es una solución del S.E.L.

$$P\mathbf{c} = \mathbf{u}_0$$

siendo $P = [\mathbf{x}_1|\ldots|\mathbf{x}_p] \in \mathcal{M}_p$, regular tal que

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

2 Estabilidad

Definición. 2.1 Sea $A \in \mathcal{M}_p$ y $\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$ un sistema de ecuaciones en diferencias. Diremos que la solución $\{\mathbf{u}_n\}$, correspondiente al vector inicial $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^P$ es:

1) **Asintóticamente estable**, si para cada $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^p$ la solución, $\{\mathbf{v}_n\}$, del sistema correspondiente a $\mathbf{v}_0$, verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\| = 0.$$

2) **Estable**, si para todo $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^p$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que la solución, $\{\mathbf{v}_n\}$, correspondiente a $\mathbf{v}_0$, verifica
$$\forall n \geq 0, \quad \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\| \leq \alpha.$$

3) **Inestable**, si existe $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^p$ tal que la sucesión $\{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\|\}$ no está acotada.

Proposición. 2.2 La estabilidad de la solución correspondiente a $\mathbf{u}_0$, es equivalente a la estabilidad de la solución nula. Es decir, el tipo de estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones en diferencias es siempre el mismo, dependiendo sólo de la matriz de coeficientes y no del vector inicial.

Como consecuencia de esto, un sistema de ecuaciones en diferencias $\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$ es:

1) **Asintóticamente estable**, si
$$\forall \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^p, \quad \lim_{n\to\infty} \|A^n \mathbf{v}_0\| = 0.$$

2) **Estable**, si
$$\forall \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^p,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 0,\ \|A^n \mathbf{v}_0\| \leq \alpha.$$

3) **Inestable**, si
$$\exists \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^p, \quad \{\|A^n \mathbf{v}_0\|\} \text{ no está acotada.}$$

En el caso diagonalizable tenemos:

Teorema. 2.3 Sea $A \in \mathcal{M}_p$ **diagonalizable**. Entonces, el sistema de ecuaciones en diferencias $\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$ es:

1) Asintóticamente estable, si, para todo autovalor, λ, de A, es $|\lambda| < 1$.

2) Estable, si $|\lambda| \leq 1$, para todo autovalor λ de A.

3) Inestable, si existe un autovalor λ de A, con $|\lambda| > 1$.

3 Matrices estocásticas: cadenas de Markov

En esta sección veremos un caso particular de sistema de ecuaciones en diferencias, que ofrece una interesante interpretación en términos de probabilidad.

Definición. 3.1 Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_p$, $A = (a_{ij})$, es estocástica, o de Markov, si:

1) $\forall\ i, j = 1, \ldots, p, \quad a_{ij} \geq 0.$

2) $\forall j = 1, \ldots, p, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij} = 1.$

Una cadena de Markov es un sistema de ecuaciones en diferencias, $\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$, cuya matriz de transición, A, es una matriz estocástica. Cada vector $\mathbf{u}_n$ se denomina vector de estados y cada una de sus componentes, estado. En términos de probabilidad el elemento a_{ij} se interpreta como la probabilidad de pasar del estado j, en el paso $n-1$, al estado i, en el paso n.

Proposición. 3.2 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p$ tal que, para todo $i, j = 1, \ldots, p$, $a_{ij} \geq 0$. Entonces,
$$A \text{ es estocástica} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{e}^t A = \mathbf{e}^t$$
siendo $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$. Como consecuencia:

1) Si $A, B \in \mathcal{M}_p$ son estocásticas, entonces AB es estocástica.
2) Si A es estocástica, entonces A^n es estocástica, para todo n.
3) Si A es estocástica, entonces 1 es un valor propio de A.

El siguiente teorema resulta útil a la hora de "localizar" los autovalores de una matriz.

Teorema. 3.3 (Gerhgorin) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ y sea, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Consideremos, para $i = 1, \ldots, n$, los intervalos,

$$\mathbf{I}_i = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a_{ii}| \leq p_i\}$$

Entonces, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A, se tiene $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{I}_i$.

Nota. 3.4 *Se tiene un resultado similar si utilizamos las columnas de A para definir los p_i, ya que los autovalores de A y A^t son los mismos.*

Corolario. 3.5 Si A es una matriz estocástica, entonces todo autovalor λ de A verifica $|\lambda| \leq 1$. En particular, toda cadena de Markov, cuya matriz de transición sea diagonalizable, es estable.

Definición. 3.6 Un vector estacionario, de una matriz estocástica A, es un autovector de A asociado al autovalor 1.

Teorema. 3.7 Sea $A \in \mathcal{M}_p$ una matriz estocástica cuyo único autovalor de módulo 1, es $\lambda = 1$. Entonces, si A es **diagonalizable**, para todo $\forall \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^p$, existe $\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{u}_0$, y dicho valor es un vector estacionario.
Si, además, $\lambda = 1$ es un autovalor simple (de multiplicidad algebraica 1) entonces el límite anterior existe y sólo depende de la suma de las componentes del estado inicial, $\mathbf{u}_0$, elegido.