1. Problema 3, C4 2001

Sea $D = diag(d_1, ..., d_n)$ matriz diagonal con $d_i \neq d_j \forall i \neq j$.
Sean $A, B, M, S \in M_{nn}(\mathbf{R})$.

(a). Demostrar que si $MD = DM$, entonces M es diagonal.

(b). Sea S invertible con $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ diagonales. Probar que $AB = BA$. (Hint: el producto de diagonales conmuta)

(c). Sea $S^{-1}AS$ diagonal. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

Sol:
(a)

$$MD = DM$$
$$(MD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} D_{kj} = M_{ij} d_j$$

Pues $D_{kj} = 0 (\forall k \neq j)$
De igual modo,

$$(DM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} M_{kj} = d_i M_{ij}$$

Igualando coeficiente a coeficiente, obtenemos que $M_{ij} d_j = d_i M_{ij}$. Si $M_{ij} \neq 0$, entonces $d_j = d_i$. Por el enunciado, esto implica que $i = j$.

Es decir, si $M_{ij} \neq 0$, se tiene que $i = j$, por lo tanto, el elemento es parte de la diagonal.

Por otro lado, si suponemos que $i \neq j$ y $M_{ij} \neq 0$, llegamos a la contradicción (dividiendo por M_{ij}) que dice que $d_i = d_j$, ie, un elemento de la diagonal no puede ser distinto de cero.

(b)

Usando el hint, decimos que las diagonales conmutan.

$$\begin{aligned}
(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) &= (S^{-1}BS)(S^{-1}AS) \\
S^{-1}ABS &= S^{-1}BAS \ /S\cdot \ \text{ y } \ \cdot S^{-1}(\text{pues } \exists S^{-1}) \\
AB &= BA
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
AB = BA \Rightarrow AIB &= BIA \\
ASS^{-1}B &= BSS^{-1}A \ /S^{-1}\cdot \ \text{ y } \ \cdot S \\
(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) &= (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)
\end{aligned}$$

ie, $(S^{-1}AS)$ y $(S^{-1}BS)$ conmutan.

Como $(S^{-1}AS) = D$ matriz diagonal, por la parte (a), concluímos que $(S^{-1}BS) = M$ es diagonal, ya que $MD = DM$.

2. Problema 3 C4 1999

Sea $A \in M_{nn}(\mathbf{R}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.
Se define la función T(A) como la suma de los elementos de la diagonal de A, ie:

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Sean $A, B \in M_{nn}(\mathbf{R})$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Demostrar que:

(a). $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

(b). $T(\lambda A) = \lambda T(A)$.

(c). $T(AB) = T(BA)$.

(d). Si $P \in M_{nn}(\mathbf{R})$ invertible, probar que $T(A) = T(PAP^{-1})$.

(e). $T(AA^T) \geq 0$ y $T(AA^T) = 0 \iff A = 0$ (matricial) .

Sol:
(a)
$T(A + B) = \sum (A + B)_{ii} = \sum (A_{ii} + B_{ii}) = \sum A_{ii} + \sum B_{ii} = T(A) + T(B)$

(b)
$T(\lambda A) = \sum (\lambda A)_{ii} = \sum \lambda \cdot A_{ii} = \lambda \sum A_{ii} = \lambda T(A)$

(c)

$$\begin{aligned}
T(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki}) \text{(cambio sumatorias)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik}) \text{(la multiplicación en } \mathbf{R} \text{ conmuta)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} \text{ (reconociendo término de la multiplicación BA)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \text{ (los índices son mudos)} \\
&= T(BA)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
T(A) = T(AI) &= T(A(P^{-1}P)) \\
&= T((AP^{-1})P) \\
&= T(P(AP^{-1})) \text{ por (c), } T(AB) = T(BA) \\
&= T(PAP^{-1})
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
T(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} (AA^T)_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} A_{ik} A^T_{ki}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} A_{ik} A_{ik}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} A^2_{ik})
\end{aligned} \tag{1}$$

Como $A_{ik} \in (R)$, $A^2_{ik} \geq 0$. Esto implica que la suma es mayor o igual que cero. Es decir, $T(AA^T) \geq 0 (\forall A)$.

Ahora la segunda parte. Claramente, si A = 0, la suma de sus elementos diagonales es cero. Ahora, si $T(AA^T) = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2) = 0$$

Esto sólo es posible si $A_{ik} = 0 (\forall i, k)$, ya que si hubiese algún elemento no nulo, la suma sería mayor estricta que cero, pues aparecería ese elemento al cuadrado más otros términos.

En conclusión, $T(AA^T) = 0 \iff A = 0$.