1. Problema 1

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Calcule el determinante de $A - \lambda I$.

Para esto siga los siguientes pasos:

(i) Denotemos por det_n al determinante de la matriz $A - \lambda I$ cuando A es de $n \times n$. Pruebe que $det_{n+1} = -\lambda det_n - det_{n-1}$.

(ii) Asumiendo que $\begin{pmatrix} det_n \\ det_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} det_{n-1} \\ det_n \end{pmatrix}$, con $M \in M_{22}(\mathbb{R})$, encuentre M.

(iii) Encuentre los valores y vectores propios de M.

(iv) Encuentre una expresión para det_n.

Problema 25 guía

Problema 25 Se quiere resolver la siguiente recurrencia de nmeros reales: $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ y $u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}$ para $n \geq 0$. Para ello se define $x^{(n)} = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})^t$.
(i) Calcule $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tal que para todo $n \geq 0$,

$$x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = Ax^{(n)},$$

y demuestre que $x^{(n+1)} = A^{n+1}x^{(0)}$.
(ii) Usando la expresin anterior calcule u_n para $n \geq 3$.

Problema 18 guía

Problema 18 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 3 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$. Determine los valores de a, b, c para los cuales A es diagonalizable y para dichos valores d una base de vectores propios de A.

Problema 24 guía

Problema 24

(i) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y $k \leq n$. Se conoce la siguiente factorizacin de A:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

donde $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \neq 0$. Si definimos

$$A^+ = P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\lambda_k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

probar que $A^+ \cdot A = A \cdot A^+$ y que $A^+ \cdot A = P \cdot \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$. ¿Cuales son los valores propios de $A \cdot A^+$?

(ii) Sea $n \geq 2$ y $w \in \mathbb{R}$. Considere la matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} w & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & w & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & w & -1 \\ w & \cdot & \cdot & \cdot & w & w \end{pmatrix}.$$

Probar por induccin que $\mathrm{Det}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} w^k$. (Indicacin: pruebe que $\mathrm{Det}(A_n) = \mathrm{Det}(A_{n-1}) + w^n$).

```
> A := matrix(2,2, [0,1,-1,-lambda]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
>
```

$$-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\ -\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$$

```
> eigenvectors(A);
```

$$\left[-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\ 1,\ \left\{\left[-\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\ 1\right]\right\}\right],\left[-\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\ 1,\ \left\{\left[-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\ 1\right]\right\}\right]$$

```
> P:=matrix(2,2, [-1/2*lambda-1/2*(lambda^2-4)^(1/2),
  -1/2*lambda+1/2*(lambda^2-4)^(1/2), 1,1]);
```

$$P := \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2} & -\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Diag:=matrix(2,2,[-1/2*lambda+1/2*(lambda^2-4)^(1/2),
  0,0,-1/2*lambda-1/2*(lambda^2-4)^(1/2)]);
```

$$Diag := \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> simplify(inverse(P));
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}} & -\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2\sqrt{\lambda^2-4}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}} & \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2\sqrt{\lambda^2-4}} \end{bmatrix}$$

```
> simplify(multiply(P,Diag,Diag,Diag,Diag,Diag,
  inverse(P),matrix(2,1,[-lambda,lambda^2 -1])));
```

$$\begin{bmatrix} -5\lambda^4+6\lambda^2+\lambda^6-1 \\ -\lambda(-6\lambda^4+10\lambda^2-4+\lambda^6) \end{bmatrix}$$

```
>
```