Resumen Transformaciones Lineales.
MA11A, Octubre 2004
Hugo Mora.
Primera versión. Cualquier corrección a ucursos o un mail a hmora@ing...

1. Transformaciones lineales

Sean U y V espacios vectoriales *sobre el mismo cuerpo* $\mathcal{K}$. Diremos que una función $T : U \to V$ es una transformación lineal si y sólo si satisface:

1. $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$.

2. $\forall u \in U, \lambda \in \mathcal{K}, T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Notar que la definición anterior es equivalente a:

1. $T(0_U) = 0_V$, donde 0_U es el cero de U y 0_V el de V.

2. $\forall u_1, u_2 \in U, \lambda \in \mathcal{K}, T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$.

Dem.
Debemos probar usando estas nuevas propiedades que se cumple la definición anterior.
En efecto, tomando $\lambda = 1$ en la segunda propiedad recuperamos $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ y tomando $u_2 = 0$, usamos la primera propiedad y tenemos que $T(\lambda u_1 + 0) = \lambda T(u_1) + T(0)$. La primera propiedad implica que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

En lo personal prefiero usar esta equivalencia para probar que algo es lineal.

1.1. Subespacios asociados.

Se define para $T : U \to V$ lineal,

$Ker(T) = \{x \in U, T(X) = 0\}$ (el *núcleo*) e $Im(T) = \{y \in V, \exists x \in U, T(x) = y\}$ (la *imagen*).

Se define además *rango*(T) $= \dim(Im(T))$ y *nulidad*(T) $= \dim(Ker(T))$

1.2. Teorema Núcleo-Imagen (TNI)

Para toda transformación lineal $T : U \to V$, se cumple que:

$\dim(U) = \dim(Im(T)) + \dim(Ker(T))$.

Notar que $Im(T) \subseteq V$ y $Ker(T) \subseteq U$.

1.3. Matriz representante.

Dada una cierta base $\beta_U = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ de U y otra $\beta_V = \{v_1, v_2, ..., v_q\}$ de V, dim(U) = p, dim(V) = q, existe una matriz, llamada matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V, definida por

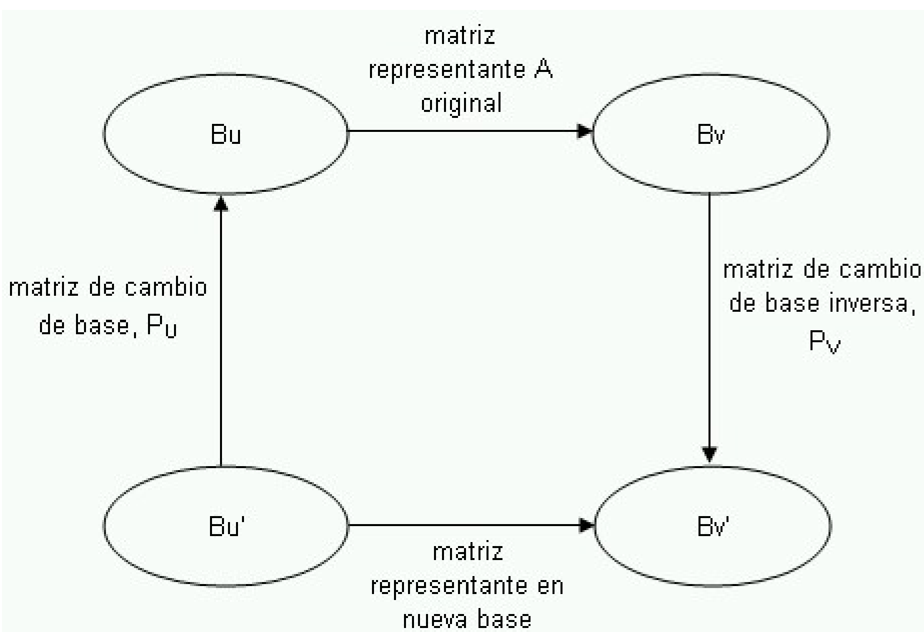
$M_{\cdot j}$ (columna j de M) = $T(u_j)$ escrito en la base β_V

es decir, si $T(u_j) = \sum \alpha_i v_i$, la columna j de la matriz será $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}$

1.4. Matrices de pasaje o cambio de base

Supongamos que tenemos T representada en una base de partida B_U y llegada B_V. Por ahora podemos pensar en que ambas son la base canónica.

Nos piden encontrar la matriz representante con respecto a otras bases. ¿Qué hacemos? Veamos el siguiente dibujo:



Nos piden representar T con respecto a las nuevas bases B'_U y llegada B'_V. Es decir, parto en la base de abajo a la izquierda y quiero llegar abajo a la derecha. Esto se puede ver como pasar por 3 flechas: la del primer cambio de base (P_U), la matriz original A y P_V.

Ahora, si tenemos un vector que representa un elemento de U (recordar que U no tiene por que ser $\mathbf{R}^n$, pero lo representaremos así) en la base nueva, por ejemplo $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}$

Este vector significa: el elemento es $\sum \alpha_i u'_i$, o sea la suma de α_i veces el elemento i-ésimo de la base.

Por ejemplo, Si U $= \mathbf{R}^3$ y $B_U = \{(1,0,1)^t, (1,1,1)^t, (0,0,1)^t\}$, en esta base el vector dado por

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ significa: $1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en la base canónica.

Si tenemos un elemento representado de esta manera en la base nueva, debemos pasarlo a la base original. ¿Cómo se hace eso? se quiere escribir cada elemento de la nueva base como elementos de la base original, por lo que queremos resolver el sistema $B_U X = u'_j$ para cada u'_j de la nueva base. En esta notación B_U es la matriz que tiene como columnas los elementos de la base de igual nombre.

Podemos resolver para todo j al mismo tiempo, escribiendo el sistema aumentado $(B_U \ B'_U)$, es decir, la base antigua escrita como matriz y la base nueva.

Si la base original es la base canónica este sistema tiene solución trivial y es B'_U, es decir *la matriz que permite pasar de cualquier base B' a la base canónica es simplemente la que corresponde a escribir los elementos de B' como columnas de la matriz*

¿Extraño? veamos un ejemplo:

Sea B=$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La matriz que pasa de esta base a la canónica es simplemente $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora, cuál es la matriz que pasa de B a la base $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Se puede resolver el sistema aumentado $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$, que equivale a encontrar $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (aunque se puede escalonar y resolver de manera usual, obteniendo el mismo resultado).

Como verán es sencillo cuando la base de llegada es la canónica.

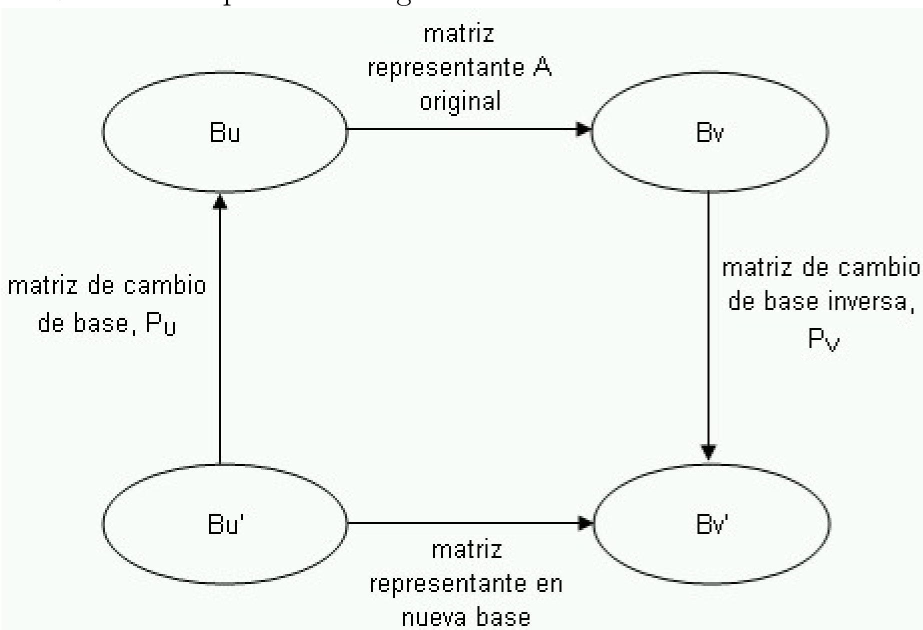
Otra forma de verlo, ya que es sencillo pasar de una base cualquiera a la canónica, es decir que para pasar de la base B_U a la base B'_U de debe hacer lo siguiente:

- pasar de B_U a la canónica con la matriz que tiene como columnas los elementos de B_U. Esta matriz la llamaremos P_1

- pasar de la canónica a B'_U. Para esto hagamos primero el camino sencillo que es pasar de B'_U a la canónica mediante la matriz con los elementos de B'_U como columnas. Si llamamos a esa matriz P_2, para pasar de B'_U a la base canónica necesitamos P_2^{-1}.

- Finalmente, para pasar de B_U a B'_U unimos los dos pasos anteriores, es decir, primero multiplicamos por P_1 para llegar a la base canónica, obteniendo P_1X y luego por P_2^{-1} para pasar a B'_U. Es decir queda que $P_2^{-1}P_1$ es la matriz de cambio de base.

Volvamos al problema original:



Analicemos un ejemplo con $U = V = \mathbf{R}^3$ y $B_U = B_V =$ la canónica de $\mathbf{R}^3$. Sea T la transformación cuya matriz representante con respecto a la base canónica es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se desea calcular la matriz representante de T con respecto a $B'_U = B'_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución:

La matriz P_U va de una base rara a la base canónica. Tal como vimos anteriormente es simplemente escribir los vectores de la base como columnas, ie,

$$P_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora P_V es el camino inverso, ir de la base canónica a la nueva base, por lo que es simplemente la inversa, $P_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

Finalmente, la matriz representante de T con respecto a la nueva base corresponde a $P_V A P_U$, ya que partimos de la base de U, le aplicamos P_U para pasar a la base canónica, le aplicamos A y finalmente aplicamos P_V para devolvernos a la nueva base. Es decir, la matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5. Ejemplo 2

Sea $T : M_{22}(\mathbf{R}) \to M_{22}(\mathbf{R})$ una transformación lineal tal que

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y
$T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Calcular la matriz representante con respecto a la base de partida

$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$
y la base de llegada $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$
(ii) Calcule la matriz representante con respecto a las bases canónicas.

Sol:
(i) Esta primera parte es para ver si entendieron el concepto. La transformación aplicada al primer elemento de la base B es el primer elemento de la base C, lo mismo para el segundo, el tercero y el cuarto elemento de la base. Por lo tanto, la matriz representante en estas bases es la identidad.

Recordemos que para encontrar una matriz representante debemos escribir los elementos de el espacio de partida y llegada como vectores. Como $dim(M_{22}(\mathbf{R})) = 4$, representaremos sus elementos como $\mathbf{R}^4$.

Además, la representación depende de la base en la que estemos.

De este modo, en la base B $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base canónica (primer elemento de B).

Mientras en la base de llegada, C, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en la base canónica (primer elemento de C).

(ii) Para encontrar la representación con respecto a la base canónica debemos partir de la base B y llegar a C después de aplicar la transformación T, pasando por las bases canónicas.

O sea debemos calcular dos matrices de pasaje: La que va de la base B a la base canónica y la que va de la canónica a la base C.

Para calcular la que va de la base canónica a la base B, buscamos resolver 4 sistemas, para escribir cada vector de la base canónica como combinación lineal de los elementos de la base B. Es decir, debemos resolver el sistema $Bx = e_i$ para cada i=1...4. De este modo sabemos como escribir el i-ésimo vector canónico como c.l. de los de la base B. Podemos resolver los cuatro sistemas juntos usando:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se darán cuenta que esto equivale a (casi) encontrar la inversa. Casi porque basta pivotear hacia un lado y resolver como se hace con gauss. Usando esto, pivoteamos (fila 1 menos 4 y luego 2 menos 3):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Finalmente despejamos para cada uno de los cuatro sistemas, por separado. Encontramos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para pasar de la base C a la canónica basta con escribir los vectores de la base C como columnas de la matriz, es decir, la matriz buscada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto (pensando en el gráfico), debemos ir desde la base canónica a B, luego de B a C (aplicando T, que con estas bases es la identidad), y finalmente de C a la base canónica, es decir, la matriz final es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3/2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para probar que estamos bien calculemos

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3/2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Revisen los otros elementos que nos dan al principio. Al parecer está todo bien.