Resumen Transformaciones Lineales.
Hugo Mora.

1. Transformaciones lineales

Sean U y V espacios vectoriales *sobre el mismo cuerpo* $\mathcal{K}$. Diremos que una función $T : U \to V$ es una transformación lineal si y sólo si satisface:

1. $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$.

2. $\forall u \in U, \lambda \in \mathcal{K}, T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Notar que la definición anterior es equivalente a:

1. $T(0_U) = 0_V$, donde 0_U es el cero de U y 0_V el de V.

2. $\forall u_1, u_2 \in U, \lambda \in \mathcal{K}, T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$.

Dem.
Debemos probar usando estas nuevas propiedades que se cumple la definición anterior.
En efecto, tomando $\lambda = 1$ en la segunda propiedad recuperamos $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ y tomando $u_2 = 0$, usamos la primera propiedad y tenemos que $T(\lambda u_1 + 0) = \lambda T(u_1) + T(0)$. La primera propiedad implica que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

En lo personal prefiero usar esta equivalencia para probar que algo es lineal.

1.1. Subespacios asociados.

Se define para $T : U \to V$ lineal,
$Ker(T) = \{x \in U, T(X) = 0\}$ (el *núcleo*) e $Im(T) = \{y \in V, \exists x \in U, T(x) = y\}$ (la *imagen*).

Se define además *rango*(T) $= \dim(Im(T))$ y *nulidad*(T) $= \dim(Ker(T))$

1.2. Teorema Núcleo-Imagen (TNI)

Para toda transformación lineal $T : U \to V$, se cumple que: $\dim(U) = \dim(Im(T)) + \dim(Ker(T))$.

Notar que $Im(T) \subseteq V$ y $Ker(T) \subseteq U$