Solución auxiliar 17 Agosto 2004
Hugo Mora C.

# 1. Problema 1, C4 2001

1. Encuentre dos matrices, L y U, triangulares inferior y superior respectivamente, tales que $A = LU$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Sea $J \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ tal que $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ y $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   *a*) Pruebe que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.

   *b*) Sea $\alpha \neq 1/n$. Calcule $\beta$ tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.

   *c*) Sea $\alpha = 1/n$, verifique que $(I - \alpha J)e = 0$ y concluya que $(I - \alpha J)$ no es invertible.

Solución:

1. $Je = ne$:
   Primero, es claro que $Je$ es un vector, por lo que tiene una sola columna, luego:
   $(Je)_i = \sum J_{ik}e_k = \sum 1 = n(\forall i)$
   Es decir, $Je$ es un vector $\in \mathbf{R}^n$ que tiene todas sus componentes iguales a $n$. Obviamente, $ne$ también es eso, luego, $Je = ne$.

   $J^2 = nJ$:
   $(J^2)_{ij} = \sum J_{ik}J_{kj} = n(\forall i, j)$. Esto implica que es igual a $nJ$ (una matriz con n en todas sus componentes).

2. Sea $\alpha \neq 1/n$.
   Si $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$, tenemos que $(I - \alpha J)(I + \beta J) = I$. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= (I - \alpha J)(I + \beta J) \\ I &= I + \beta J - \alpha J - \alpha\beta J^2 \\ 0 &= (\beta - \alpha - \alpha\beta n)J \end{aligned}$$

   Tenemos esa igualdad componente a componente (0 representa arriba la matriz 0). Notar que usamos que $J^2 = nJ$. Tomando cualquiera de las componentes, debemos tener que $(\beta - \alpha - n\alpha\beta) = 0$.

   Esto implica que $\beta(1 - n\alpha) = \alpha \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{1-n\alpha}$, pues $1 - n\alpha \neq 0$ $(\alpha \neq 1/n)$ .

   Luego, si $\beta = \frac{\alpha}{1-n\alpha}$, tenemos que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.

3. Sea $\alpha = 1/n$.

$$\begin{aligned}(I-\alpha J)e &= e-\alpha Je\\ &= e-\alpha ne\\ &= e-\frac{1}{n}ne\\ &= e-e\\ &= 0\end{aligned}$$

Trivialmente, la ecuación $(I-\alpha J)x = 0$ tiene como solución el vector $x = 0$, luego, dicha ecuación tiene 2 soluciones: $x$ y $e$. Por lo tanto, como sabemos que

$A$ es invertible $\iff$ $Ax = b$ tiene solución única $(\forall b \in \mathbf{R}^n)$,

tenemos que la matriz $(I-\alpha J)$ no es invertible.

# 2. Problema 1, C4 2002

1. Sea la matriz a coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$. Demuestre que si la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$.

2. Considere el sistema lineal a coeficientes reales siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} -x_1 & & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0\\ & x_2 & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0\\ \alpha x_1 & +\beta x_2 & & & = & 0\\ \beta x_1 & +\beta x_2 & +\alpha x_3 & & = & 0\end{array}$$

Determine las condiciones sobre los parámetros reales $\alpha$ y $\beta$ que garanticen que el sistema tenga una única solución.

Solución: Pueden ver la pauta del control 3. Lo único que puedo agregar es lo que les mencioné en auxiliar para la primera parte, que pueden separar ese $Ax = 0$ tiene una única solución $\Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$ en tres implicancias:

$Ax = 0$ tiene sol. única $\Rightarrow (a \neq b) \wedge Ax = 0$ tiene sol. única $\Rightarrow (a \neq c) \wedge Ax = 0$ tiene sol. única $\Rightarrow (b \neq c)$, y luego demostrar las tres implicancias por contrarrecíproca, es decir, partir de que $a = b$ y llegar a que dicho sistema no tiene solución única.

En todo caso, si ven la pauta verán que no es complicado probar todo directamente. Cualquier duda, lo vemos en clases.

# 3. Problema 3, C4 2002

1. Demuestre que si A, B y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es invertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.

2. Sea la matriz de $n$ filas y $n$ columnas triangular superior a coeficientes reales siguiente:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $N = C - I$, donde $I$ es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que $N^n = 0$.

3. Demuestre que para las matrices $C$ y $N$ definidas en (2), se tiene que $C$ es invertible y su inversa es:

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$$

Solución:

1. Probemos que$(A^{-1} + B)^{-1} = A(A + B^{-1})^{-1} B^{-1}$. Basta ver que

$$\begin{aligned} (A^{-1} + B)A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1} &= (I + BA)\Big[B(A + B^{-1})\Big]^{-1} \\ &= (I + BA)(BA + I)^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Notar que la matriz $(I+BA)$ es invertible, ya que es el producto de $(A+B^{-1})$ con $B$, ambas matrices invertibles.

2. Notar que

$$C - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$(C - I)_{ij} = M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 1 = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, veamos cuanto vale $(M^2)_{ij}$. Noten que $M := (C - I)$
$(M^2)_{ij} = \sum M_{ik} M_{kj}$. Para que sea distinta de cero esta suma, debemos tener que ambos coeficientes, $M_{ik}$ y $M_{kj}$ deben ser distintos de cero. Según la condición dada anteriormente, esto se cumple ssi $i+1 = k \wedge k+1 = j$. Esto es equivalente a que $i + 2 = j$. Noten que dado un par $i, j$, existe un sólo valor de k asociado, ya que $M_{ik}$ es distinto de cero para un sólo valor de $k$, luego, la expresión que buscamos es:

$$(M^2)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 2 = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora veamos si esto es general, es decir, intentaremos probar que

$$(M^p)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + p = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lo haremos por inducción. Caso base: $p = 1$ directo.

$p \Rightarrow p + 1$:

$(M^{p+1})_{ij} = \sum M^p_{ik} M_{kj}$. De nuevo, esto es distinto de cero ssi $i + p = k$ ($M^p_{ik}$ por H.I.) y además $k + 1 = j$.

Uniendo estas dos condiciones, tenemos que necesitamos $i + (p + 1) = j$. Es decir,

$$(M^{p+1})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + (p+1) = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego, por inducción, probamos la expresión general para $(M^p)_{ij}$.

En particular, si $p = n$, tenemos que $M^n_{ij} \neq 0 \iff i + n = j$, con lo que $j > n$.
Claramente ningún índice j puede cumplir eso, por lo tanto no existen $i, j$ tales que $i + n = j$, por lo tanto $M^n_{ij} = 0 (\forall i, j)$.

Por lo tanto, $M^n$ es la matriz nula.

3. Basta probar que

$$C(I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}) = (I + N)(I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}) = I$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(I + N)(I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}) &= I - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1} + \\ &\quad + N - N^2 + N^3 + \cdots - (-1)^{n-1} N^{n-1} + (-1)^{n-1} N^n \\ &= I + (-1)^{n-1} N^n \\ &= I\end{aligned}$$

Lo último ya que probamos que $N^n$ era la matriz nula.

Estudien para el control.