

1. Problema 1, C4 2001

1. Encuentre dos matrices, L y U , triangulares inferior y superior respectivamente, tales que $A = LU$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Sea $J \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ tal que $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ y $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Pruebe que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.
b) Sea $\alpha \neq 1/n$. Calcule β tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.
c) Sea $\alpha = 1/n$, verifique que $(I - \alpha J)e = 0$ y concluya que $(I - \alpha J)$ no es invertible.

2. Problema 1, C4 2001

1. Sea la matriz a coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Demuestre que si la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$.

2. Considere el sistema lineal a coeficientes reales siguiente:

$$\begin{array}{rrrrcl} -x_1 & & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0 \\ \alpha x_1 & +\beta x_2 & & & = & 0 \\ \beta x_1 & +\beta x_2 & +\alpha x_3 & & = & 0 \end{array}$$

Determine las condiciones sobre los parámetros reales α y β que garanticen que el sistema tenga una única solución.

3. Problema 1, C4 2001

1. Demuestre que si A , B y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es invertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.
2. Sea la matriz de n filas y n columnas triangular superior a coeficientes reales siguiente:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $N = C - I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que $N^n = 0$.

3. Demuestre que para las matrices C y N definidas en (b), se tiene que C es invertible y su inversa es:

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1}N^{n-1}$$