

Ejercicio de Matriz de Pasaje

24 de octubre de 2004

Sea $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ aplicación definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (b+c)x + (c+d)x^2$$

- (i) Mostrar que T es lineal.
- (ii) Encontrar la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas β y β' definidas por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\beta' = \{1, x, x^2\}$$

- (iii) Encontrar la matriz de pasaje de la base β' a $\tilde{\beta}' = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$, es decir, la matriz que permite escribir la base β' en términos de la nueva base $\tilde{\beta}'$.
- (vi) Encontrar la matriz de pasaje de la base $\tilde{\beta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a β .
- (v) Encontrar la matriz representante de T con respecto a las bases $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\beta}'$.

Solución :

- (i) Es directo (hacerlo si no lo ve directo !)
- (ii) Escribamos la imagen por T de los elementos de β :

$$\begin{aligned}
T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta'} \\
T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= 1+x \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta'} \\
T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= x+x^2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\beta'} \\
T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= x^2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\beta'} \\
\Rightarrow [T]_{\beta\beta'} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(iii) Escribamos los elementos de β' en función de los de $\tilde{\beta}'$:

$$\begin{aligned}
1 &= A(1+x) + B(x+x^2) + C(1+x^2) \\
&= A+C + (A+B)x + (B+C)x^2 \\
\Rightarrow A+C &= 1, A+B=0, B+C=0 \\
\Rightarrow A &= 1/2, B = -1/2, C = 1/2
\end{aligned}$$

Luego

$$(1)_{\tilde{\beta}'} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

y repitiendo el procedimiento para los otros elementos

$$(x)_{\tilde{\beta}'} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$(x^2)_{\tilde{\beta}'} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$[P]_{\tilde{\beta}'\beta'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(vi) Basta escribir los elementos en la base canónica :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_\beta &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_\beta &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_\beta &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_\beta &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow [P]_{\beta\tilde{\beta}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

(v) Sabemos que para una matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$[T(A)]_{\beta'} = [T]_{\beta'\beta} [A]_\beta$$

luego, escribamos A en base $\tilde{\beta}$

$$[A]_\beta = [P]_{\beta\tilde{\beta}} [A]_{\tilde{\beta}}$$

si pre-multiplicamos por $[T]_{\beta'\beta}$

$$[T]_{\beta'\beta} [P]_{\beta\tilde{\beta}} [A]_{\tilde{\beta}} = [T(A)]_{\beta'}$$

y si pre-multiplicamos por $[P]_{\tilde{\beta}'\beta'}$

$$[T(A)]_{\tilde{\beta}'} = [P]_{\tilde{\beta}'\beta'} [T]_{\beta'\beta} [P]_{\beta\tilde{\beta}} [A]_{\tilde{\beta}}$$

y así la matriz buscada es

$$[T]_{\tilde{\beta}'\tilde{\beta}} = [P]_{\tilde{\beta}'\beta'} [T]_{\beta'\beta} [P]_{\beta\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■