

---

Universidad De Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor: Jorge Amaya A.

Auxiliares: Bolívar Díaz L.

Francisco Silva A.

---

Álgebra , sección 3

2004 - Segundo semestre

---

AUXILIAR 12

SUMA DIRECTA DE ESPACIOS VECTORIALES Y  
LINEAL INDEPENDENCIA

---

**Problema 1** Considere los siguientes subconjuntos de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

$$W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ es par}\} \quad W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ es impar}\}$$

- i) Demuestre que  $W_1$  y  $W_2$  son espacios vectoriales de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- ii) Demuestre que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ .

**Problema 2** Sea  $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$  el espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y a valores en  $\mathbb{R}$ . Definimos la función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \times \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f g dx$$

- i) Pruebe que efectivamente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en  $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ .
- ii) Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N}$  si el conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{C}([-\pi, \pi])$  es ortogonal, entonces es l.i.
- iii) Usando lo anterior pruebe que el conjunto  $\{\sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx)\}$  es l.i.  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Problema 3** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$ . Decimos que  $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$  es un conjunto casi independiente de vectores si  $m > n$  y para todo  $j \in \{1, \dots, m\}$  se tiene que  $\{v_1, \dots, v_m\} \setminus \{v_j\}$  es linealmente independiente.

- i) Pruebe que si  $\{v_1, \dots, v_m\}$  es casi independiente, entonces  $m = n + 1$ .
- ii) Dé un ejemplo en  $V = \mathbb{R}^2$  de un conjunto casi independiente.