

PAUTA



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FI-10A - Introducción a la Física.  
Sección: 06  
Profesor: Patricio Martens C.  
Fecha: Martes 05 de Octubre de 2004  
Tiempo: 20 min.

### EJERCICIO N°17

- a) Determinar los modos normales de vibrar que corresponden a una cuerda tensa de longitud  $L$  cuyo extremo izquierdo está fijo y cuyo extremo derecho remata en una argolla pequeña, de masa despreciable, que puede deslizar sin roce por una guía recta horizontal.
- b) Grafique el modo fundamental y las dos armónicas siguientes.

Sol:

a) La ecuación de onda escrita en su forma más general:

$$\Psi(x,t) = [A \cos(Kx) + B \sin(Kx)] [C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)]$$

Recordar que  $C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$  se puede escribir como  $E \cos(\omega t + \phi)$  es decir:

$$C \cos \omega t + D \sin \omega t = E \cos(\omega t + \phi)$$

PROPUUESTO: calcular  $E$  y  $\phi$  en función de  $C$  y  $D$ .

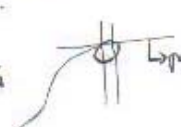
Entonces  $\Psi(x,t) = [A \cos(Kx) + B \sin(Kx)] E \cos(\omega t + \phi)$

$$\Psi(x,t) = [\bar{A} \cos(Kx) + \bar{B} \sin(Kx)] \cos(\omega t + \phi)$$

$$\bar{A} = AE \quad \bar{B} = BE$$

Condiciones:

En  $x=0$   $\Psi(x=0,t) = 0 \Rightarrow \bar{B} \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad \forall t$   
 $\Rightarrow \bar{B} = 0$

En  $x=L$   $\frac{d\Psi}{dx}(x=L,t) = 0 \rightarrow$  no hay pendiente  Pendiente = 0.

$$\Rightarrow \bar{A} K \cos(Kx) \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \cos Kx = 0 \quad \text{ya que } \bar{A} \text{ no puede ser cero (si fuera así no tendríamos una función ya que } \bar{B}=0)$$

$$\Rightarrow Kx = m\pi \quad m=1, 3, 5, \dots$$

$$\text{Como } x=L \Rightarrow K = \frac{m\pi}{2L}$$

Recordar  $K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{m}$

Por lo tanto, las frecuencias de resonancia o modos normales están dadas por:

$$f = \frac{1}{\lambda} v \Leftrightarrow f = v \frac{m}{4L}$$

$$f_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{m}{4L}$$

4 PTO

0

b) La solución de la ecuación de onda es:

$$\Psi(x,t) = A \sin(Kx) \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Psi(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{2L} \cdot x\right) \cos(\omega t + \phi).$$

Encontramos los modos:

$$\Psi(x,t) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2L} \cdot x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{2L} \cdot x = m\pi \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Como  $m$  puede tomar los valores 1, 3, 5, ... ; empezamos por el 1°.

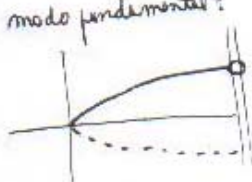
$$\bullet \quad m = 1 \Rightarrow x = 2Lm \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\checkmark) \text{ para } m = 0 \\ x = 2L \quad (x) \text{ para } m = 1; \text{ no sirve ya que } x > L \end{cases}$$

$$\bullet \quad m = 3 \Rightarrow x = \frac{2Lm}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\checkmark) \text{ para } m = 0 \\ x = \frac{2L}{3} \quad (\checkmark) \text{ para } m = 1 \\ x = \frac{4L}{3} \quad (x) \text{ para } m = 2; \text{ no sirve } x > L \end{cases}$$

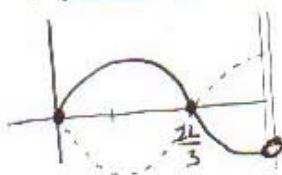
$$\bullet \quad m = 5 \Rightarrow x = \frac{2Lm}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\checkmark) \text{ para } m = 0 \\ x = \frac{2L}{5} \quad (\checkmark) \text{ para } m = 1 \\ x = \frac{4L}{5} \quad (\checkmark) \text{ para } m = 2 \\ x = \frac{6L}{5} \quad (x) \text{ para } m = 3; \text{ no sirve } x > L \end{cases}$$

graficando, y teniendo en cuenta que  $\frac{d\Psi}{dx}(x=L,t) = 0$

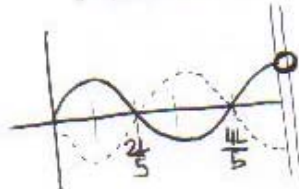
modo fundamental:



2° armónico (m=3)



3° armónico (m=5)



OJO: no me quedó muy a escala el dibujo!!

REVISADO POR: C. BENAVIDES  
DUDAS A: CARENANI@ING.UCHILE.CL.

2 ptos

2