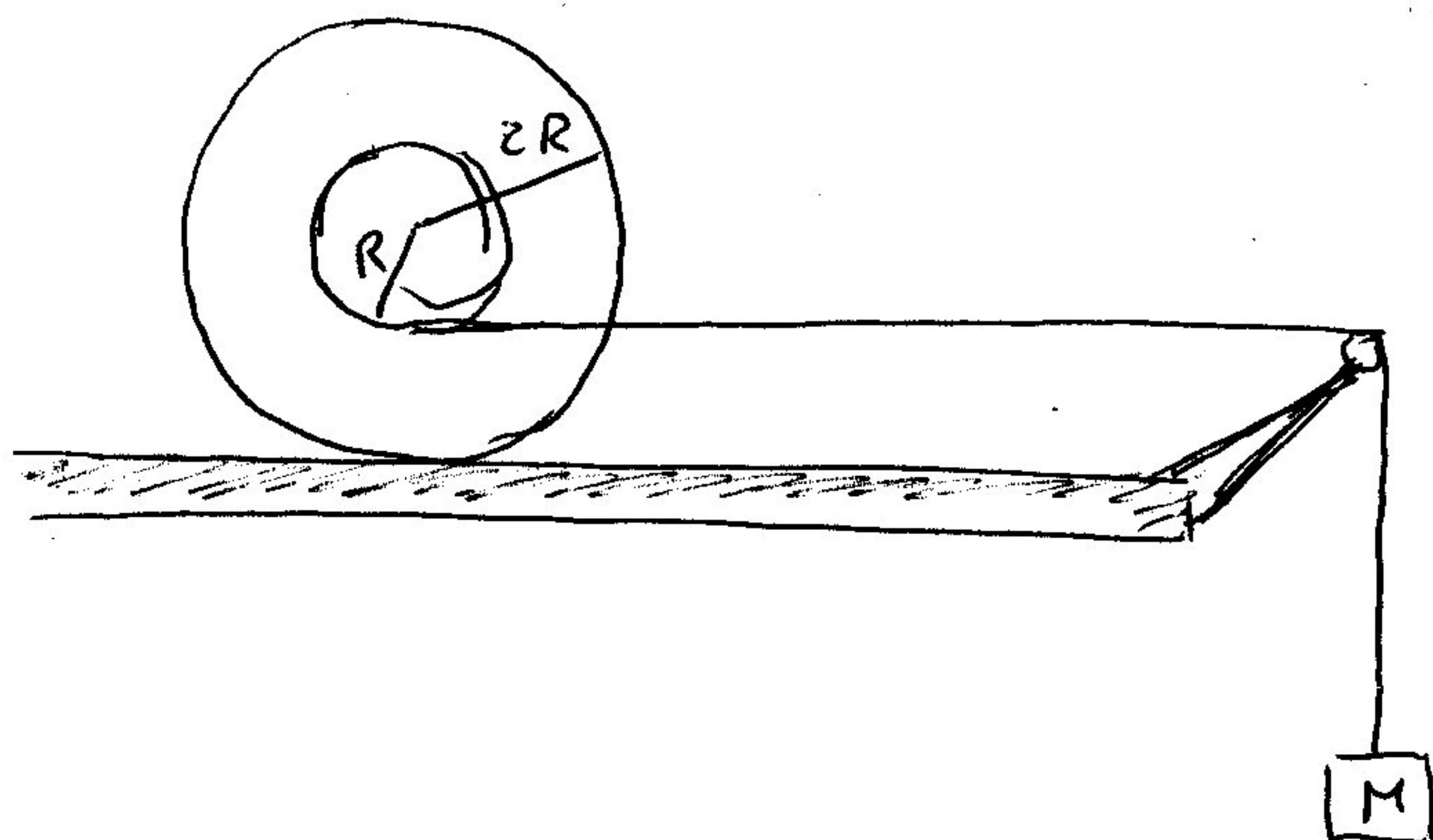
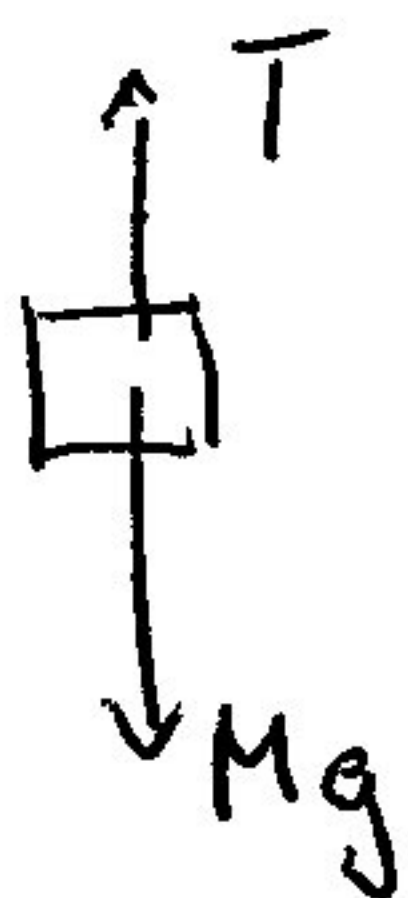


Solución Auxiliar 5

P1



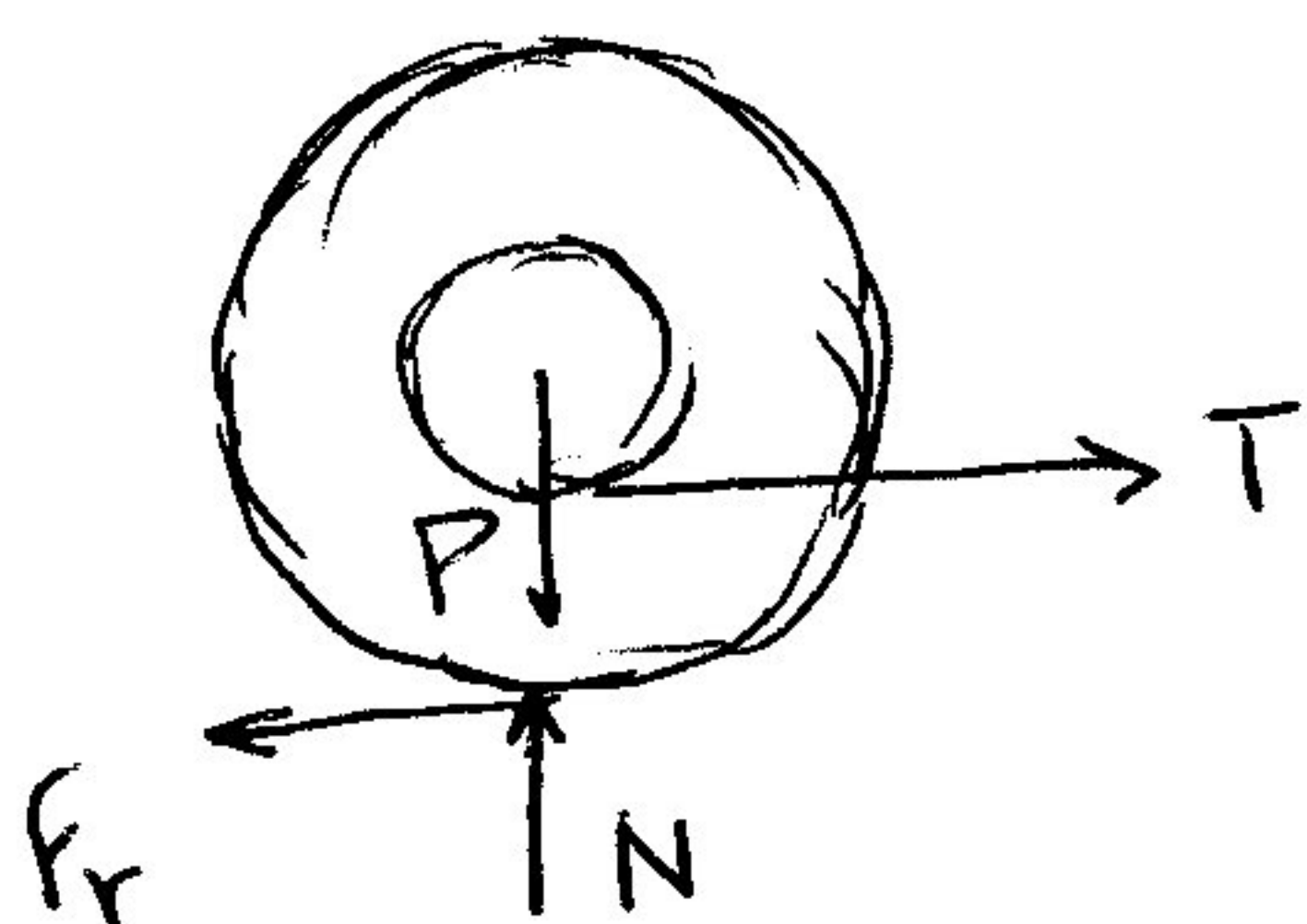
DCL Masa M



El bloque se mueve hacia abajo
entonces la ecuación de movimiento es

$$\boxed{Mg - T = Ma_M} \quad (1)$$

DCL Carrete



$$\text{Peso } P = 2mg + mg + mg$$

$$P = 4mg$$

$$\sum F_y \Rightarrow P = N \Rightarrow \boxed{N = 4mg} \quad (2)$$

$$\sum F_x \Rightarrow \boxed{T - f_r = 4m a_{cm}} \quad (3)$$

$$\sum \vec{\tau} = J \alpha$$

Torque con respecto a un eje que pase por el C.M. del carrete

$$\boxed{-T \cdot R + f_r \cdot 2R = J_{cm} \cdot \alpha} \quad (4)$$

~~Pero~~ El momento de inercia de un cilindro de masa M con respecto a su eje de simetría es $J = \frac{1}{2} M R^2$

El carrete está formado por 2 discos de masa m, radio 2R y un cilindro de masa 2m, radio R, entonces

$$J_{\text{CARRETE}/cm} = \frac{1}{2} (m) (2R)^2 + \frac{1}{2} (m) (2R)^2 + \frac{1}{2} (2m) (R)^2$$

$$\boxed{J_{\text{CARRETE}/cm} = 5mR^2} \quad (5)$$

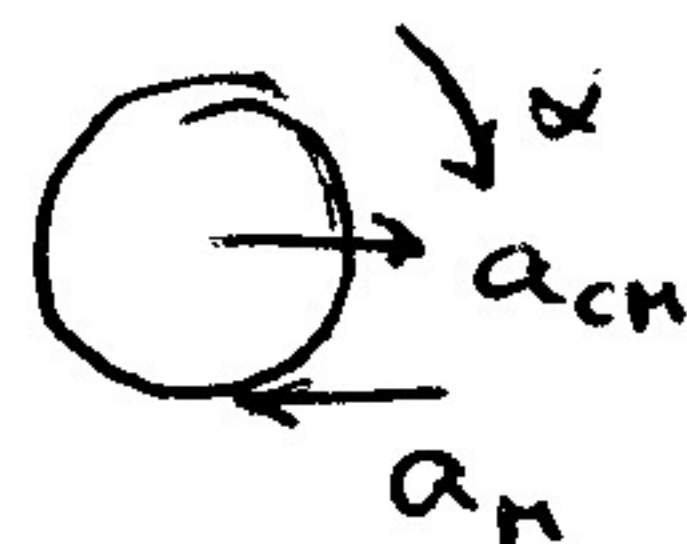
$$(5) \text{ en } (4) \Rightarrow \boxed{-TR + f_r 2R = 5mR^2 \alpha} \quad (6)$$

-El carrito rueda sin resbalar:

$$\boxed{a_{cm} = (2R) \alpha} \quad (7)$$

El carrito se mueve con aceleración a_{cm} y la cuerda se enrolla "rodando sin resbalar" sobre la superficie del cilindro de radio R entonces.

$$\boxed{a_{cm} - a_n = R \alpha} \quad (8)$$



de (7) y (8)

$$a_{cm} = 2(a_{cm} - a_n)$$

$$2a_n = a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{a_{cm}}{2}} \quad (9)$$

De (1) $\boxed{T = M(g - \frac{a_{cm}}{2})} \quad (10)$

(10) en (6)

$$-M(g - \frac{a_{cm}}{2})R + f_r 2R = 5mR^2 \frac{a_{cm}}{2R} \quad (11)$$

(10) en (3)

$$M(g - \frac{a_{cm}}{2}) - f_r = 4ma_{cm} \quad (12)$$

(11) + 2*(12)

$$\begin{array}{l} -M(g - \frac{a_{cm}}{2}) + \cancel{f_r 2} = 5m \frac{a_{cm}}{2} \\ 2M(g - \frac{a_{cm}}{2}) - \cancel{f_r 2} = 8ma_{cm} \end{array}$$

$$M(g - \frac{a_{cm}}{2}) = \frac{21}{2}ma_{cm}$$

$$Mg = \left(\frac{21m}{2} + \frac{M}{2} \right) a_{cm}$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{2Mg}{21m + M}} \quad (13)$$

(11) + (12)

$$-M\left(g - \frac{a_{cm}}{2}\right) + f_r \cdot 2 = 5m \frac{a_{cm}}{2}$$

$$M\left(g - \frac{a_{cm}}{2}\right) - f_r = 4ma_{cm}$$

$$\boxed{f_r = \frac{13m}{2} a_{cm}} \quad (14)$$

(13) en (14)

$$f_r = \frac{13m}{2} \frac{2/Mg}{(21m+M)}$$

$$\boxed{f_r = \frac{13Mmg}{21m+M}} \quad (15)$$

Finalmente, el carrito rueda sin resbalar gracias a que la fuerza de roce es estática.

$$f_r \leq \mu_e N$$

$$\mu_e \geq \frac{f_r}{N}$$

(15) > (2)

$$\mu_e \geq \frac{\frac{13Mmg}{21m+M}}{4mg}$$

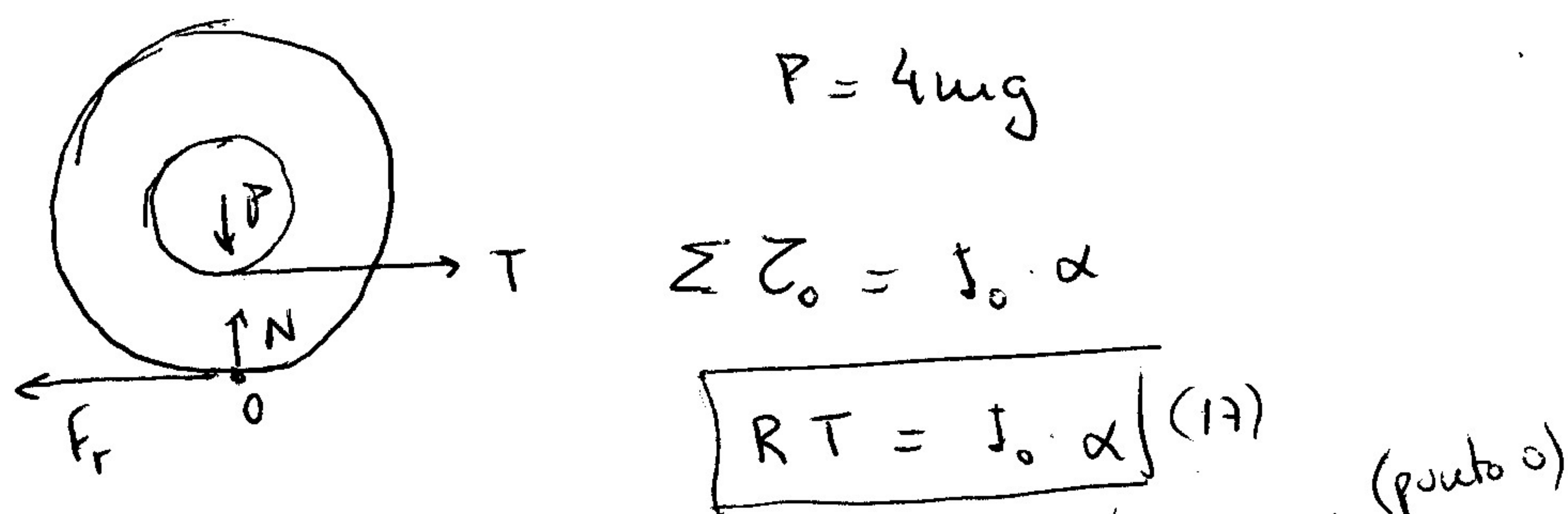
$$\Rightarrow \mu_e \geq \frac{13M}{4(21m+M)}$$

luego el mínimo valor de μ_e es

$$\boxed{\mu_e = \frac{13M}{4(21m+M)}} \quad (16)$$

Otra forma de resolver este problema es hacer Torque con respecto al punto de contacto entre el carrito y la superficie, ya que como el carrito rueda sin resbalar su único punto que está en reposo es el que está en contacto con la superficie.

Entonces al hacer Torque con respecto a este punto queda:



La ventaja de hacer Torque en este punto es que la fuerza de roce no hace Torque, con lo que se simplifica esta ecuación, pero hay que considerar ahora que el momento de Inercia se debe calcular también con respecto a un eje que pase por el punto O.

El momento de Inercia con respecto al punto O se obtiene aplicando Steiner.

$$I_O = I_{CM} + M_{total} \cdot d^2$$

$$I_O = 5mR^2 + 4m(2R)^2$$

$$\boxed{I_O = 21mR^2} \quad (18)$$

(18) en (17)

$$RT = 21mR^2 \cdot \alpha$$

$$\boxed{T = 21mR \alpha} \quad (19)$$

pero $\boxed{a = \frac{a_{CM}}{2R}} \quad (7)$

además ~~de~~ $\boxed{T = M(g - \frac{a_{CM}}{2})} \quad (10)$

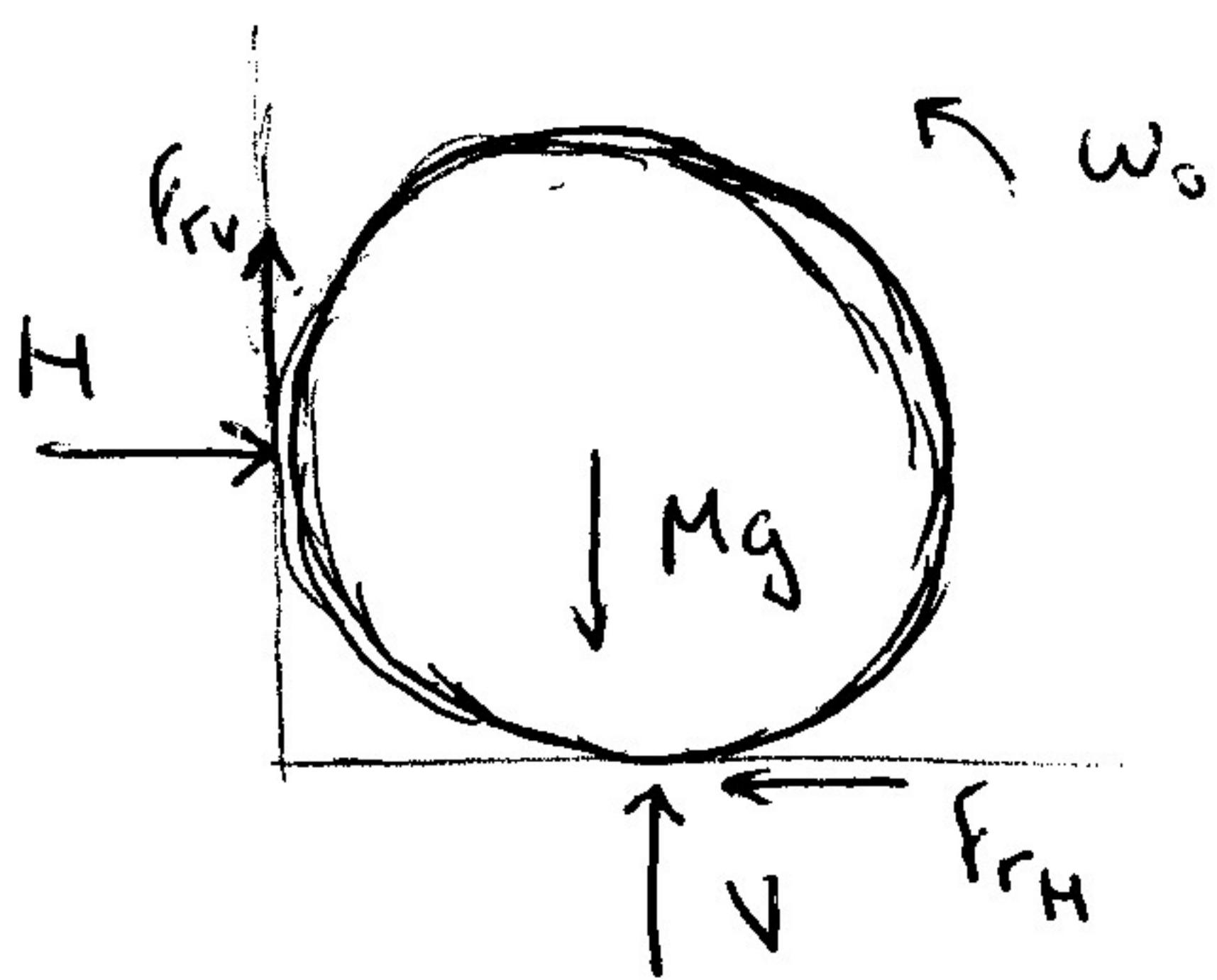
entonces (7), (10) en (19)

$$M(g - \frac{a_{CM}}{2}) = 21mR \frac{a_{CM}}{2R}$$

$$\Rightarrow Mg = \left(\frac{M}{2} + \frac{21m}{2}\right) a_{CM} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{2Mg}{M + 21m}}$$

P2



H: reacción horizontal

V: reacción vertical

f_{rH} : fuerza roce horizontal

f_{rV} : fuerza roce vertical

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{H - f_{rH} = 0} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - Mg + f_{rV} = 0$$

$$\boxed{V + f_{rV} = Mg} \quad (2)$$

$$\boxed{f_{roce} = \mu N}$$

$$\boxed{f_{rH} = \mu V} \quad (3)$$

$$\boxed{f_{rV} = \mu H} \quad (4)$$

(3) en (1)

$$H - \mu V = 0$$

$$\boxed{H = \mu V} \quad (5)$$

(4) en (2)

$$\boxed{V + \mu H = Mg} \quad (6)$$

(5) en (6)

$$\frac{V}{\mu} + \mu H = Mg$$

$$H \left(\frac{1}{\mu} + \mu \right) = Mg$$

$$\boxed{H = \frac{\mu Mg}{1 + \mu^2}}$$

El ángulo que alcance a rotar el cilindro se puede obtener ~~con~~
a partir del trabajo que hace la fuerza de roce hasta que el cilindro
se detiene

$$\Delta E = -W_{fr}$$

$$E_f - E_i = -W_{fr}$$

$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = -f_r \cdot d$$

$$+ \frac{1}{2} I \omega_f^2 = f_r \cdot (R \Delta \theta)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \omega_f^2 = (f_{rv} + f_{rh}) R \Delta \theta$$

$$\boxed{f_{rv} = \frac{\mu^2 M g}{1 + \mu^2}} \quad , \quad \boxed{f_{rh} = \frac{\mu M g}{1 + \mu^2}}$$

$$\frac{1}{4} M R^2 \omega_f^2 = \frac{\mu^2 + \mu}{1 + \mu^2} M g \cdot R \Delta \theta$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{1 + \mu^2}{4 \mu (1 + \mu)} \cdot \frac{R \omega_f^2}{g}$$

Otra forma es determinar la aceleración con que el cilindro
va frenando (desaceleración).

$$\Sigma \tau = I \alpha$$

$$f_{rh} \cdot R + f_{rv} \cdot R = -I \alpha$$

$$\left(\frac{\mu^2}{1 + \mu^2} + \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right) M g \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

Notar que el torque producido
por las fuerzas de roce se

opone a la dirección de giro
del cilindro, por eso el signo menos

$$\boxed{-2 \cdot \frac{\mu(\mu + 1)}{1 + \mu^2} \frac{g}{R} = \alpha}$$

→ Notar que esta desaceleración
es constante entonces,

Ahora por cinemática

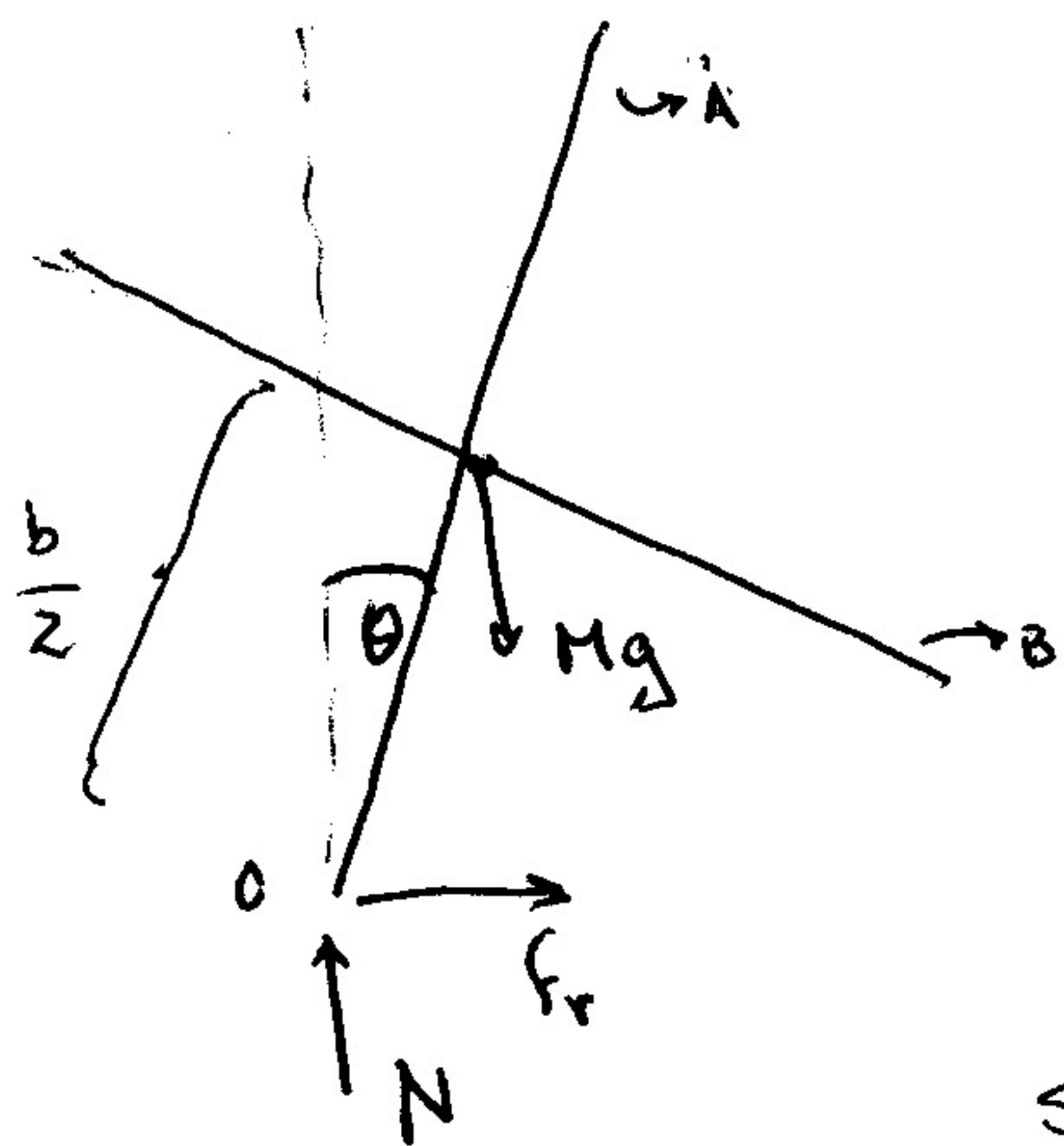
$$2 \alpha \cdot \Delta \theta = \omega_f^2 - \omega_i^2 \quad (\text{Análogo a } \boxed{2 a d = v_f^2 - v_i^2})$$

$$\Delta \theta = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{-\omega_i^2}{-2 \cdot \frac{\mu(\mu + 1)}{1 + \mu^2} \cdot \frac{g}{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \theta = \frac{\omega_i^2 \cdot R (1 + \mu^2)}{2 \mu (\mu + 1) g}}$$

P3 La cruz con grando en el punto de apoyo con el suelo 0



Torque con respecto al punto 0

$$\sum \tau_0 = I_0 \cdot \alpha$$

$$\boxed{Mg \frac{b}{2} \sin \theta = I_0 \cdot \alpha} \quad (1)$$

El momento de inercia con respecto a 0 es aplicando Steiner.

$$I_0 = I_{\text{BARRA A}/\text{EXTREMO}} + \left(I_{\text{BARRA B}/\text{CM}} + M_{\text{BARRA B}} \cdot d_{\text{CM} \rightarrow 0}^2 \right)$$

$$I_0 = \underbrace{\frac{1}{3} \frac{M}{2} b^2}_{I_{\text{BARRA A}/\text{pho 0}}} + \underbrace{\frac{1}{12} \frac{M}{2} b^2 + \frac{M}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2}_{I_{\text{BARRA B}/\text{pho 0}}} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{1}{3} M b^2} \quad (2)$$

Otra forma de obtener el momento de inercia es considerar ~~2 barras~~ el momento de inercia de 2 barras respecto a un eje que pase por su c.m. y usando Steiner obtener la inercia con respecto a 0

$$I_0 = \underbrace{\frac{1}{12} \frac{M}{2} b^2}_{I_{\text{BARRA A}/\text{cm}}} + \underbrace{\frac{1}{12} \frac{M}{2} b^2}_{I_{\text{BARRA B}/\text{cm}}} + \underbrace{M \left(\frac{b}{2} \right)^2}_{M_{\text{TOTAL}} \cdot d_{\text{CM} \rightarrow 0}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{1}{3} M b^2} \quad (2)$$

reemplazando I_0 en la ecuación de Torque tenemos.

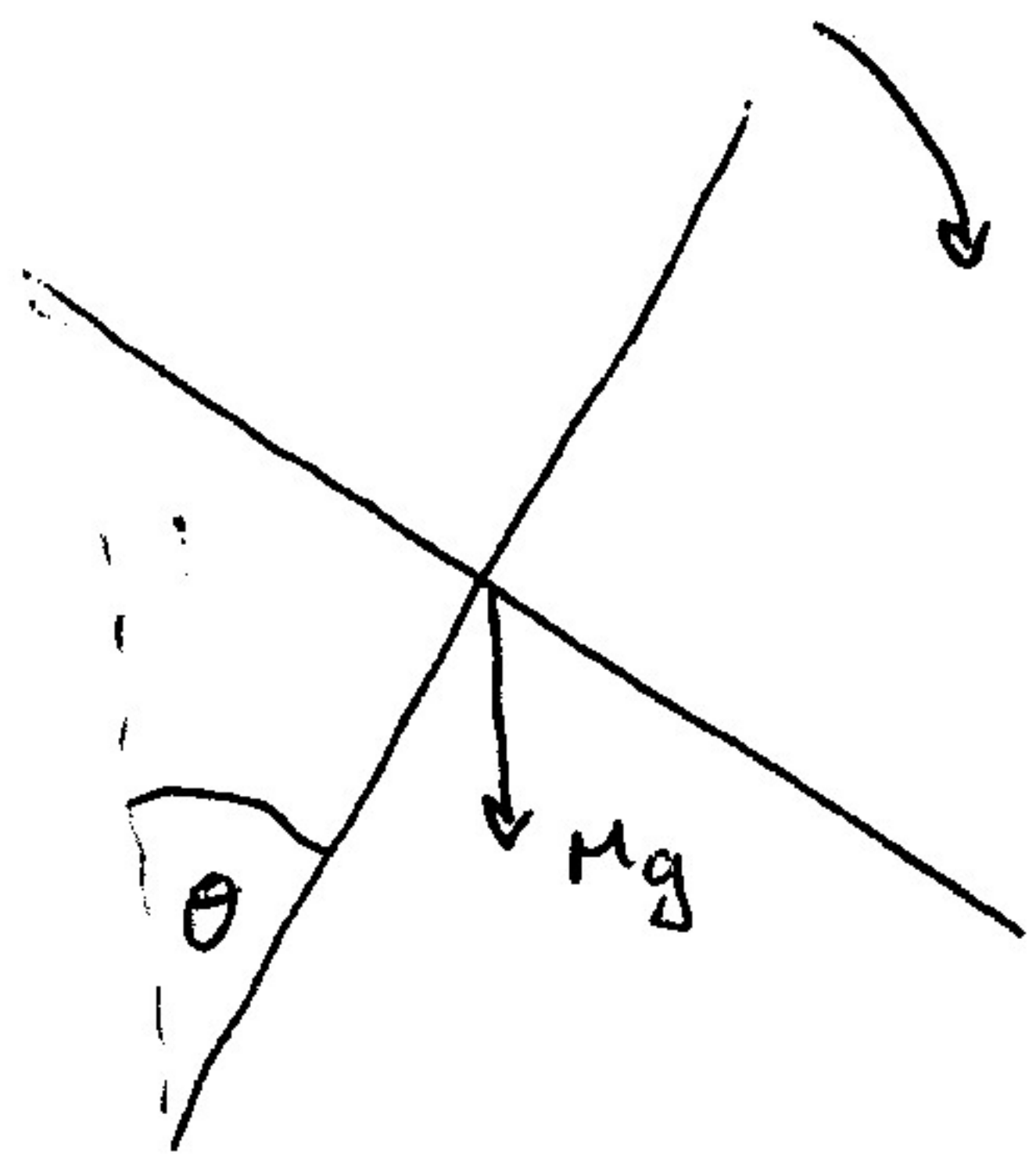
$$Mg \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} M b^2 \alpha$$

$$\boxed{\frac{3}{2} g \sin \theta = b \alpha}$$

Además $\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a}_{\text{cm}}$



La cruz cae girando respecto a O, ~~formando~~ un arco de circunferencia
 luego la aceleración del centro de masa de la cruz será:



Según $\hat{\theta}$

$$\sum \vec{F}_{\theta} = M \cdot \frac{b}{2} \alpha$$

Según \hat{r}

$$\sum \vec{F}_r = -\omega^2 \frac{b}{2} M$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = M \vec{a}_{cm}$$

$$M \frac{b}{2} \alpha \hat{\theta} - M \omega^2 \frac{b}{2} \hat{r} = M \vec{a}_{cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = -\frac{b}{2} \alpha \hat{\theta} - \omega^2 \frac{b}{2} \hat{r}}$$

recordar movimiento circular.

$$\sum \vec{F}_y = M \vec{a}_{cny}$$

~~$$N - Mg = M \vec{a}_{cny}$$~~

En la dirección y la componente de la aceleración es

$$a_y = -\frac{b}{2} \alpha \sin \theta - \omega^2 \frac{b}{2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow N - Mg = M \frac{b}{2} \alpha \sin \theta - M \omega^2 \frac{b}{2} \cos \theta$$

$$\boxed{N = Mg + -M \frac{b}{2} \alpha \sin \theta - M \omega^2 \frac{b}{2} \cos \theta}$$

De la ecuación de torque se obtiene α , pero no conocemos ω
 Entonces por energía.

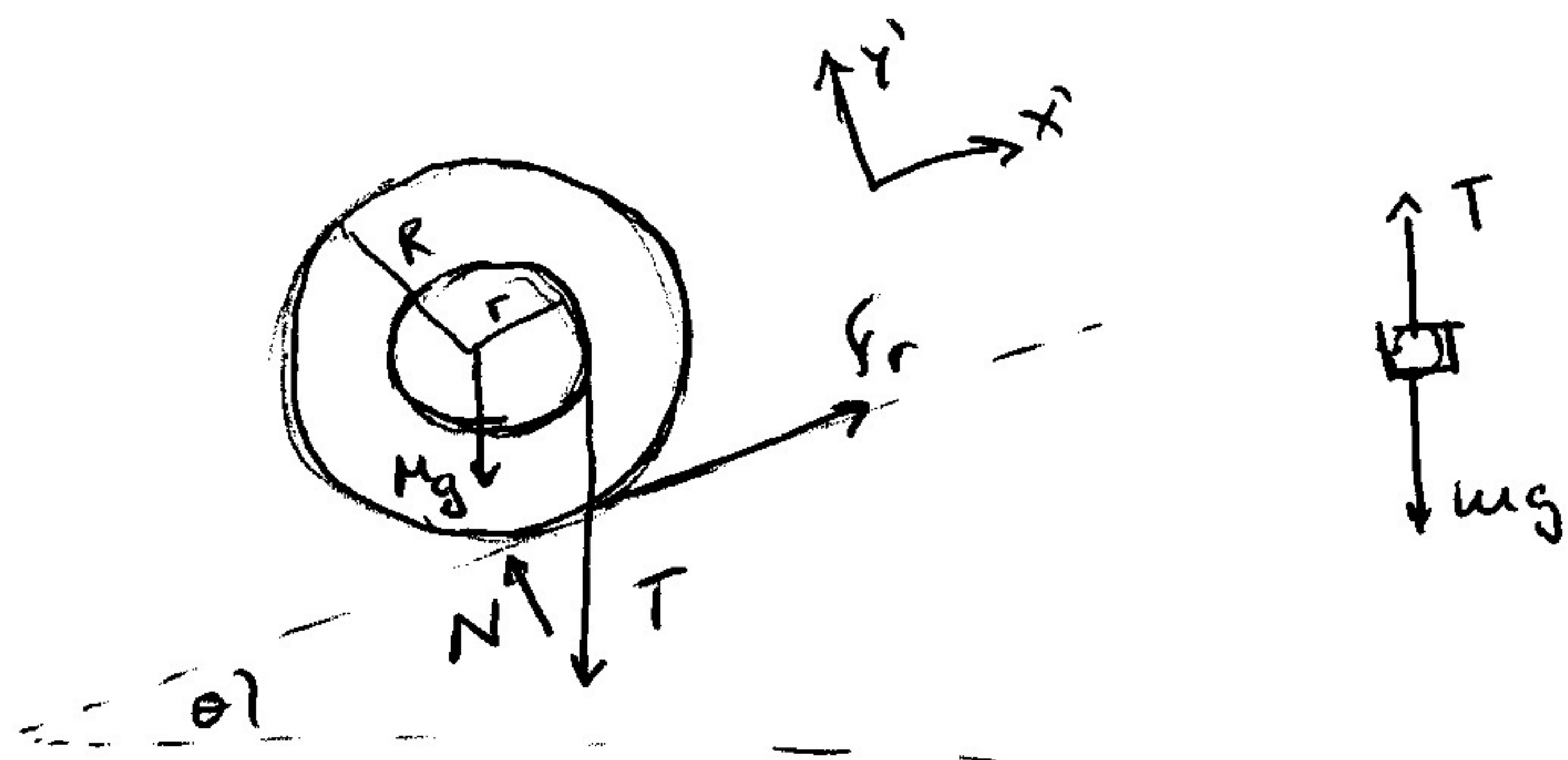
$$\vec{E}_i = \vec{E}_f$$

$$Mg \frac{b}{2} = Mg \frac{b}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

$$Mg \frac{b}{2} = Mg \frac{b}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{1}{3} M b^2 \omega^2$$

$$\boxed{\frac{\omega^2 b}{2} = \frac{3}{2} g (1 - \cos \theta)}$$

$$\text{Finalmente } \boxed{N = Mg - \frac{3M}{4} g \sin^2 \theta - \frac{3M}{2} g (1 - \cos \theta) \cos \theta}$$



Para el cilindro (equilibrio)

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow f_r - Mg \sin \theta - T \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow -Mg \cos \theta - T \cos \theta + N = 0 \quad (2)$$

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow -rT + Rf_r = 0 \quad (3)$$

Para la masa $\boxed{T = mg}$

de (3) $Rf_r = rT$

$$\Rightarrow Rf_r = rmg$$

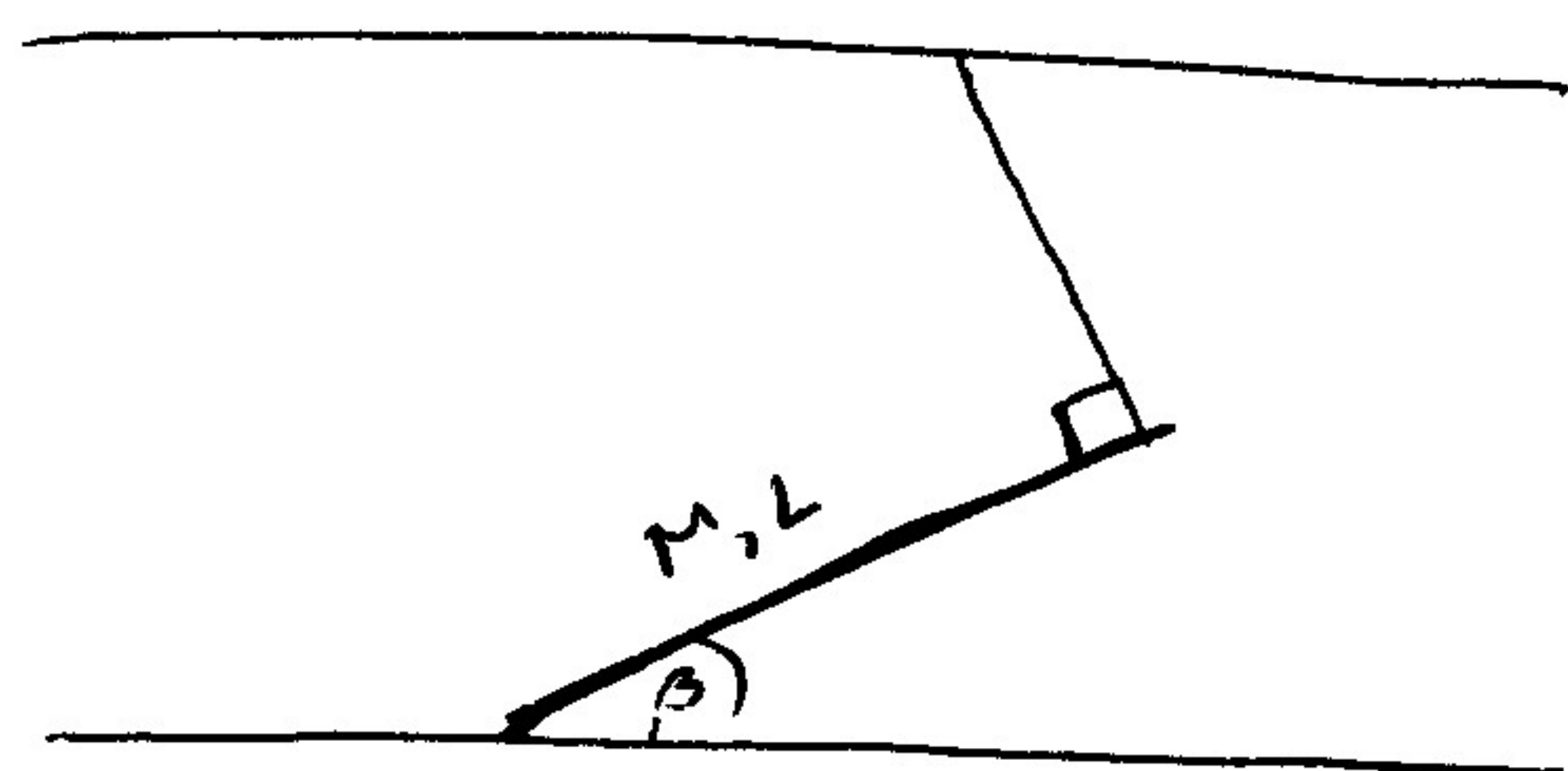
$$\boxed{f_r = \frac{r}{R} mg}$$

reemplazando en (1)

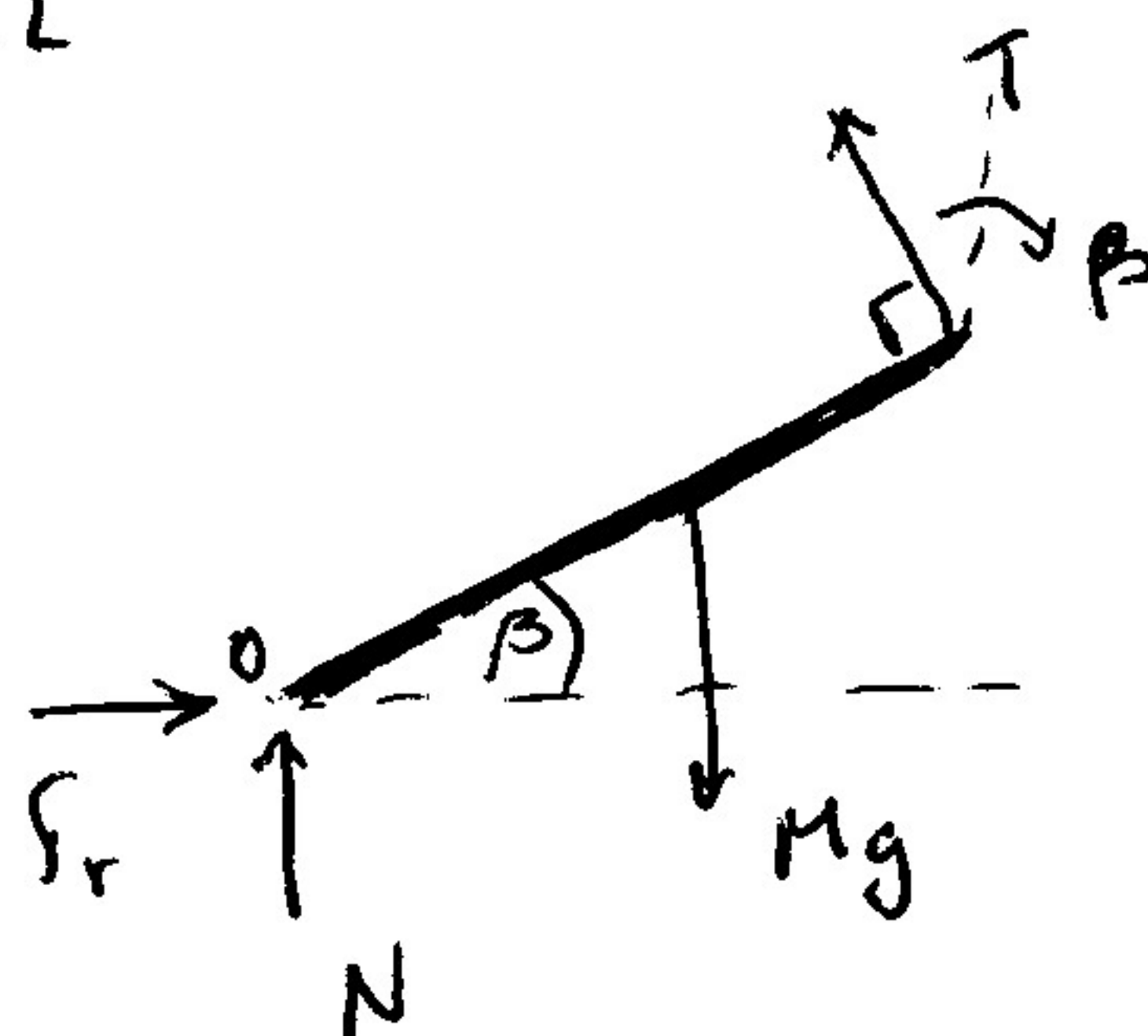
$$\frac{r}{R} mg - Mg \sin \theta - mg \sin \theta = 0$$

$$\frac{r}{R} mg = (M + m)g \sin \theta$$

$$\boxed{r = \frac{R(M + m)}{m} \sin \theta}$$



DCL



Equilibrio \Rightarrow

$$\sum \vec{r} = 0, \quad \sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \tau_o = 0 \Rightarrow -Mg \frac{L}{2} \cos \beta + TL = 0$$

$$TL = Mg \frac{L}{2} \cos \beta$$

$$\boxed{T = \frac{Mg}{2} \cos \beta} \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_r - T \sin \beta = 0$$

$$\boxed{T \sin \beta = f_r = \mu N} \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg + T \cos \beta = 0$$

$$\boxed{N = Mg - T \cos \beta} \quad (3)$$

(1) en (2)

$$\boxed{N = Mg - \frac{Mg}{2} \cos^2 \beta} \quad (4)$$

pero $f_r = \mu N \Rightarrow N = \frac{f_r}{\mu}$

o sea $N = \frac{T \sin \beta}{\mu}$

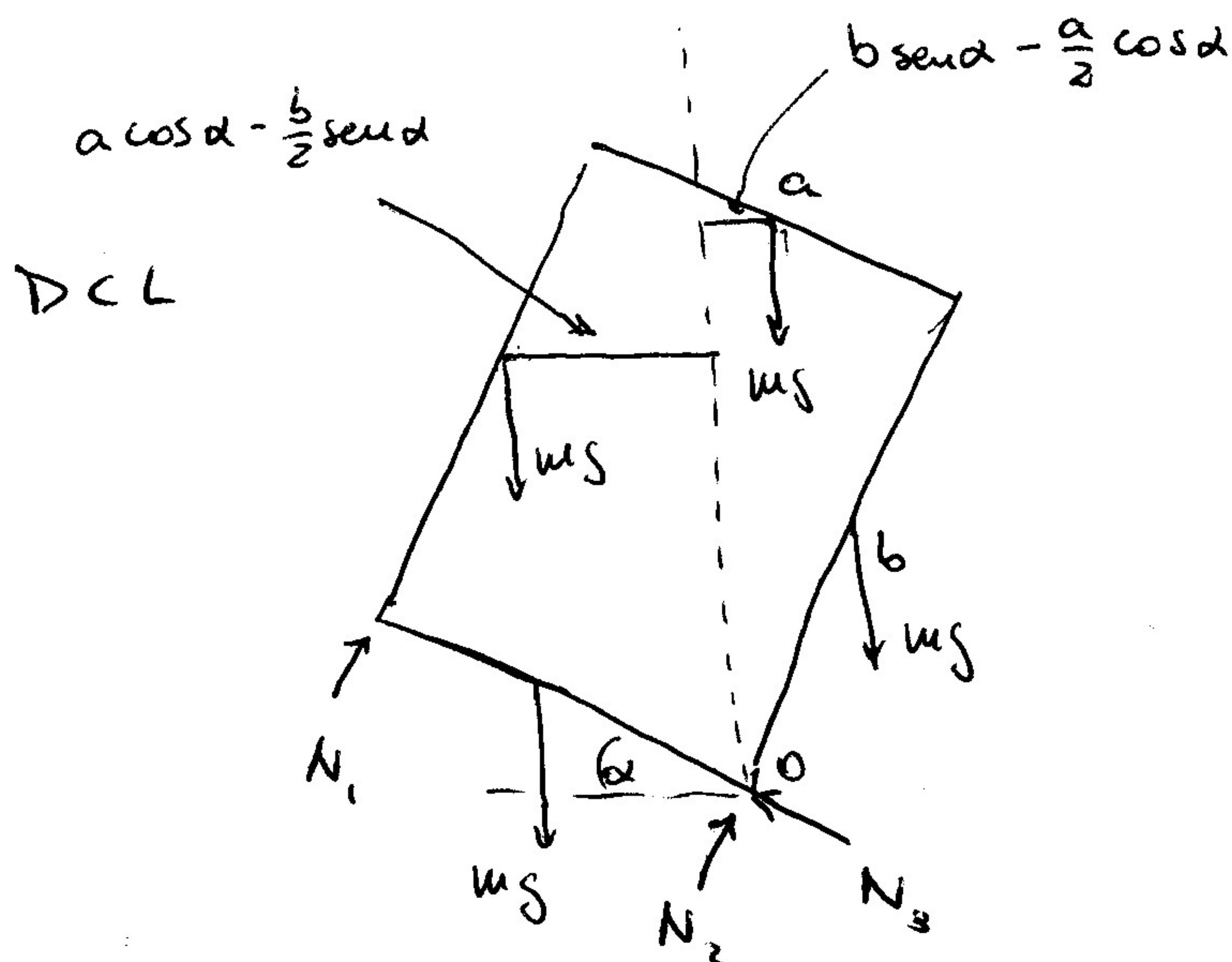
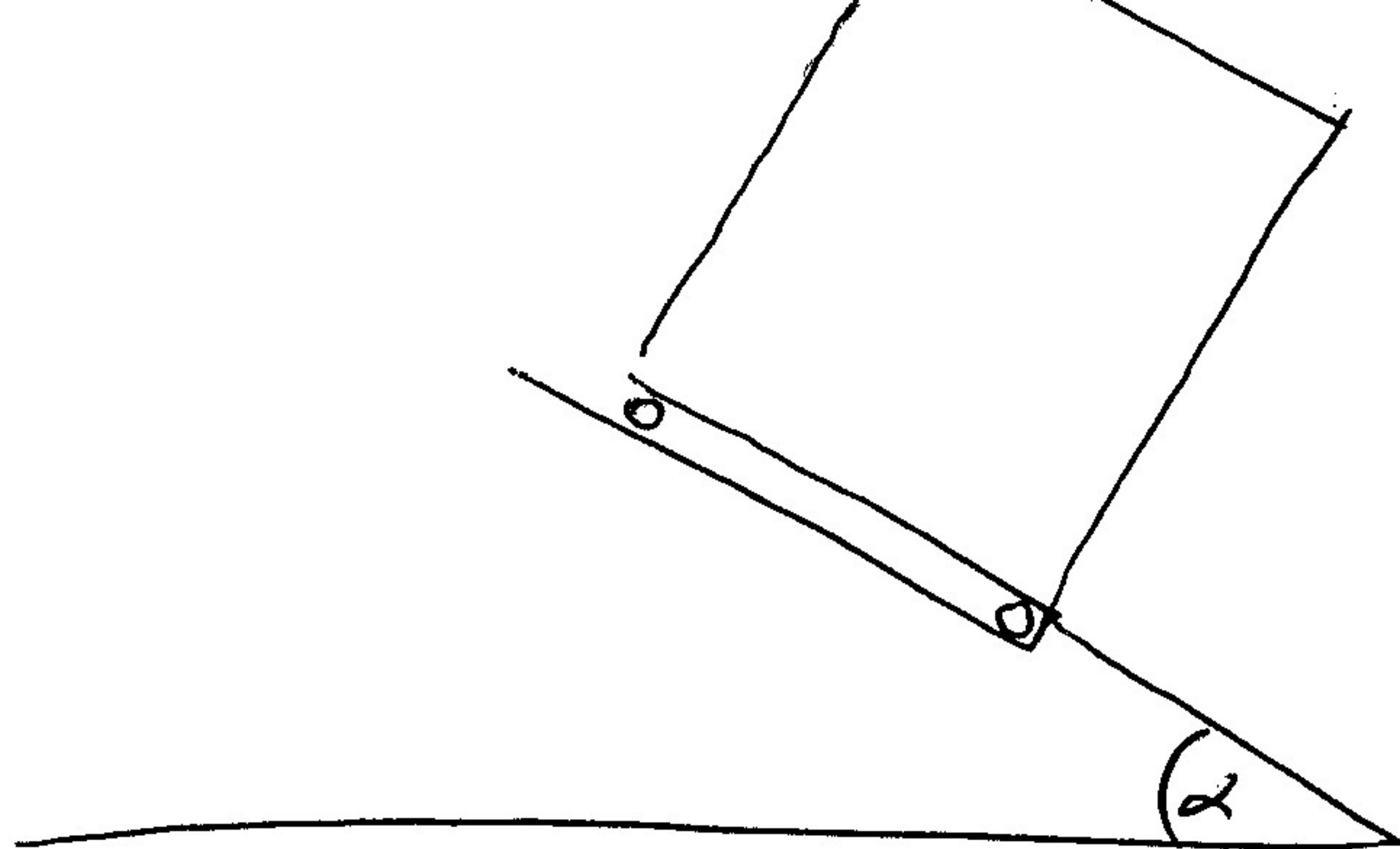
$$\boxed{N = \frac{1}{\mu} \frac{Mg}{2} \sin \beta \cos \beta} \quad (5)$$

(5) en (4)

$$\frac{1}{\mu} \frac{Mg}{2} \sin \beta \cos \beta = Mg - \frac{Mg}{2} \cos^2 \beta$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 \beta} = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\sin \beta \cos \beta}{2 - \cos^2 \beta}}$$

P6



$$\sum \tau = 0$$

Torque con respecto al pto 0

$$-N_1 a + w_S \frac{a}{2} \cos \alpha - w_S \frac{b}{2} \sin \alpha + w_S (a \cos \alpha - \frac{b}{2} \sin \alpha) - w_S (b \sin \alpha - \frac{a}{2} \cos \alpha) = 0$$

$$-N_1 a + w_S \frac{a}{2} \cos \alpha - w_S \frac{b}{2} \sin \alpha + w_S a \cos \alpha - w_S \frac{b}{2} \sin \alpha - w_S b \sin \alpha + w_S \frac{a}{2} \cos \alpha = 0$$

$$-N_1 a + 2w_S a \cos \alpha - 2w_S b \sin \alpha = 0$$

Cuando esté a punto de volcar $N_1 = 0$

$$\Rightarrow 2w_S a \cos \alpha - 2w_S b \sin \alpha = 0$$

$$a \cos \alpha = b \sin \alpha$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \tan \alpha}$$

$$\boxed{\alpha = \text{Arctg}\left(\frac{a}{b}\right)}$$

José Rodríguez C.

josrodri@ing.uchile.cl