Introducción a la Física Fi10a

Guía 9

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Mauricio Cerda, Carlos Orellana y Nicolas Reyes

Problema 47

Considere un lanzamiento de un proyectil esférico de radio R y masa M en un aire de densidad $\rho = 1$gr/litro y viscosidad $\nu = 0.15 cm^2/s$, inicialmente se lanza con una velocidad v_0 y con ángulo α respecto de la horizontal.

i) Muestre que el movimiento sigue siendo en el plano.

ii) Escriba las ecuaciones de Newton para las dos componentes de la velocidad considerando la forma general para la fuerza de arrastre: $F_D = \rho R^2 \vec{v}^2 C_D \left(\frac{|\vec{v}|R}{\nu}\right) \hat{v}$.

iii) Transforme la segunda ley de Newton para la cantidad sin dimensiones $\vec{Re} = \frac{R}{\nu}\vec{v}$.

iv) Considere la forma fenomenológica y aproximada para $C_D(Re) = \frac{6\pi}{Re} + \frac{1}{2}$ y resuelva numéricamente para una bala de cañón de acero de radio $R = 5cm$ y velocidad inicial de $500 m/s$. Estudie numéricamente el ángulo de alcance máximo. discuta y compare al caso de proyectiles donde no se considera la resitencia del aire.

Problema 48

En clases se vió que el movimiento de una masa atada a un resorte y que oscila puede representarse aproximadamente por

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \epsilon_n + \tau u_n \\ u_{n+1} &= u_n - \tau \epsilon_n, \end{aligned}$$

donde ϵ_n es la posición de la masa y u_n es una cantidad proporcional a la velocidad en la iteración n-ésima. Sin embargo la cantidad $E_n \equiv \epsilon_n^2 + u_n^2$, llamada energía aumenta en el tiempo.

Una aproximación alternativa propuesta es:

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \epsilon_n + \frac{\tau}{2}(u_n + u_{n+1}) \\ u_{n+1} &= u_n - \frac{\tau}{2}(\epsilon_n + \epsilon_{n+1}), \end{aligned}$$

Muestre que

$$E_{n+1} \equiv E_n \quad \forall \quad \tau$$

luego la energía es conservada por esta aproximación.

Problema 49

Considere el sistema mecánico siguiente. Una banda circular gira con velocidad constante V, sobre ella en forma horizontal descansa un bloque de masa M y es atado a un resorte elástico fijo al sistema de laboratorio.

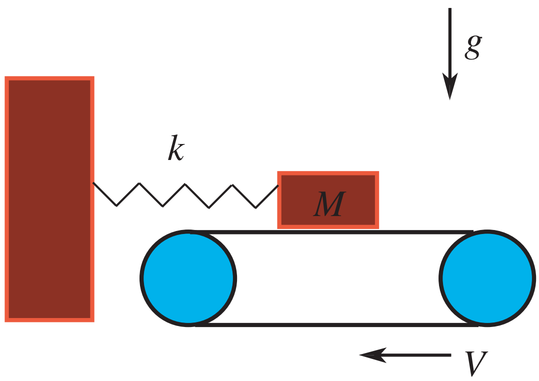

Figure 1: L .

Entre el bloque y la banda existe una ley de frotamiento $F_r = \mu(v)N$ donde $\mu(v)$ depende de la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie.

i) Escriba las ley de Newton para la posición y velocidad del bloque en el sistema laboratorio.

ii) Escriba un programa numérico para estudiar el movimiento del cuerpo. Para ello considere la función fenomenólogica (grafiquela)

$$\mu(v) = \frac{\mu_e + \frac{v^2}{v_0^2}}{1 + \frac{1}{\mu_d}\frac{v^2}{v_0^2}} \frac{v}{|v|}.$$

Use valores realistas para μ_e & μ_d como los vistos en clases, y trabaje solo con variables sin dimensiones.

iii) Describa cualitativamente para diferentes valores de $\frac{V}{v_0}$ y de $\frac{g}{\omega v_0}$ el comportamiento de la posición y velocidad (adimensionales).

Problema 50

En clases se discutión el fenómeno de auto-similaridad de la cascada de desdoblamiento de período. Dado $f(x) = \lambda x(1-x)$ la aparición de un desdoblamiento viene caraterizada por $x_{n+1} = f(x_n)$ y $x_{n+2} = f(x_{n+1})$ siendo este último, x_{n+2}, igual a x_n. Luego la iteración de la función compuesta una vez $x_{n+2} = f(f(x_n))$ tiene un interés capital. Observando la forma de $f^{(}2)(x)$ nos damos cuenta que una parte de ella parece ser similar (en escalas differentes) a $f(x)$ misma.

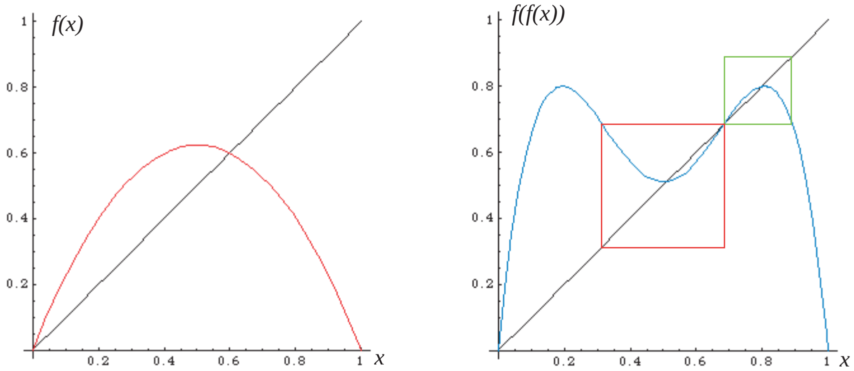

Figure 2: L .

Existe una transformación de escala o dilatación de $f^{(2)}(x)$ y x talque uno puede recuperar una copia en la función $f(x)$. Así continuamos luego de $f^{(2)}(x)$ en $f^{(4)}(x)$, de $f^{(4)}(x)$ en $f^{(8)}(x)$ &c. está sucesión permite entender tanto cualitativamente como cuantitativamente el escenario de desdoblamiento de períodos. Existen dos posibilidades a realizar esto la primera es con la pequeña parábola encerrada en elcuadrado superior en verde o bien con la invertida encerrada en el cuadrado inferior rojo. Eligiremos la invertida ya que ella preserva la simetría respecto al eje central $x = 1/2$.

i) Sea $X_n = s(x_n - 1/2)$ encuentre s para que la función $g_a(X)$ que satisface la nueva iteración $X_{n+1} = g_a(X_n)$ sea $g_a(X) = 1 - aX^2$ con $a = \lambda s$.

ii) Muestre que $g_a(g_a(X)) = (1-a) + 2a^2X^2 - a^3X^4$ bien que la función original es una parábola, y la que obtenemos es un polinomio de orden 4, podemos considerar irrelevante el término a^3X^4 ya que nos encontarmos en una zona reducida del intervalo $[-1/2, 1/2]$, y obtenemos denuevo una parábola.

iii) La autosimilitud consiste en suponer una nueva variable dilatada $\hat{X}_n = \alpha X_n$ y una nueva constante $\hat{a}$ talque la iteración $X_{n+2} = g_a(g_a(X_n))$ sea $\hat{X}_{n+2} = g_{\hat{a}}(\hat{X}_n)$. Encuentre α y $\hat{a}$.

iv) Así obtenemos una iteración que parte en a y va $\hat{a}$, así sucesivamente. Definamos entonces una sucesión $a_{k+1} = \hat{a}(a_k)$. Muestre que esta iteracción converge en infinito a $a^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Encuentre el valor de convergencia de la dilatación α.

v) Muestre que en el límite cuando $n \to \infty$ de $\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \to \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \to 2a^*(3a^* - 2) = \frac{(1+\sqrt{3})(3\sqrt{3}-1}{2} \approx$ 5.7 que es diferente de el valor exacto 4.6692, valores más precisos se pueden obtener no despreciando términos de orden 4 y considerando un cambio mś complejo que una simple dilatación $\hat{X}_n = \alpha X_n$.

Problema 51

Considere un resorte de constante elástica k y largo natural ℓ_0 atado al techo y a una masa m que cuelga en la gravedad terrestre. Si las condiciones iniciales son tales que la masa solo se mueve verticalmente, encuentre:

i) la posición de equilibrio (no movimiento).

ii) la posición y velocidad a una perturbación inicial cualquiera $x = x_0$ y $v = v_0$.

iii) la frecuencia de oscilación.

iv) Qué sucede con la energía del resorte $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$?

Problema 52

Las ecuaciones que rigen un oscilador armónico, como ya fue visto en clase son de la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \tag{2}$$

Donde A y ϕ, respectivamente son la amplitud y la fase del movimiento que dependen de las condiciones iniciales del problema (x es la posición y v la velocidad en un cierto instante de tiempo). Considere las ecuaciones anteriores y las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $v(t = 0) = v_0$, demuestre que el valor de las constantes es:

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{3}$$

$$\tan(\phi) = -\frac{v_0}{x_0\omega} \tag{4}$$