

Pauta ejercicio N°21

Nicolás Reyes

9 de noviembre de 2004

1. Parte a

La energía cinética de la partícula es: $E_{cinetica} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$

2. Parte b

La energía potencial se compone de dos términos, uno asociado al potencial gravitatorio y otro asociado al potencial elástico del resorte. Para el término gravitatorio, poniendo la referencia en la parte superior del círculo (cualquier otra referencia da lo mismo), se tiene:

$$E_{potencialg} = m g a \cos \theta$$

El potencial del resorte resulta:

$$E_{potencialk} = \frac{1}{2}k(\sqrt{2a(a+l)(1+\cos\theta)+l^2}-l_0)^2$$

3. Parte c

Para encontrar los puntos de equilibrio se deriva el potencial respecto a θ para luego igualar a cero. Recuerden que esto es equivalente a decir que la sumatoria de fuerzas sobre la partícula es nula.

$$\frac{\partial E_{potencial}}{\partial \theta} = a \sin \theta \left[\frac{K(a+l)\sqrt{2a(a+l)(1+\cos\theta)+l^2}-l_0}{\sqrt{2a(a+l)(1+\cos\theta)+l^2}} - mg \right] = 0$$

Haciendo $\sin \theta = 0$, hay dos puntos de equilibrio en 0 y Π . Existen más puntos de equilibrio que se encuentran haciendo el corcho igual a cero.

4. Parte d

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio se debe calcular la segunda derivada respecto a θ del potencial.

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = a \cos \theta \left[\frac{K(a+l)\sqrt{2a(a+l)(1+\cos\theta)+l^2}-l_0}{\sqrt{2a(a+l)(1+\cos\theta)+l^2}} - mg \right] + a \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\text{corcho}]$$

Como vamos a evaluar en los puntos de equilibrio 0 y Π no es necesario calcular la derivada del corcho. Evaluando en 0:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = a \left[K \frac{(l-l_0)(a+l)}{l} - mg \right]$$

Este punto es estable si:

$$K \frac{(l-l_0)(a+l)}{l} > mg$$

Evaluando en Π

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = a \left[mg - K \frac{(a+l)(\sqrt{4a(a+l)+l^2}-l_0)}{\sqrt{4a(a+l)+l^2}} \right]$$

Este punto es estable si:

$$mg > K \frac{(a+l)(\sqrt{4a(a+l)+l^2}-l_0)}{\sqrt{4a(a+l)+l^2}}$$

5. Parte E

Suponiendo que los puntos de equilibrio son estables, la frecuencia de pequeñas oscilaciones viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}}{\frac{\partial^2 E_c}{\partial \theta^2}}}$$

Reemplazando para $\theta = 0$ tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{K \frac{(l-l_0)(a+l)}{l} - mg}{ma^2}}$$

Y para $\theta = \Pi$:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg - K \frac{(a+l)(\sqrt{4a(a+l)+l^2}-l_0)}{\sqrt{4a(a+l)+l^2}}}{ma^2}}$$