

Introducción a la Física Fi10a

Guía 23

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Mauricio Cerda, Carlos Orellana y Nicolas Reyes

Problema 141

Un pececillo aletea de forma que su cabeza está quieta y su cola se mueve sólo verticalmente. Un diagrama sería el siguiente:



Figure 1: El pez

Se quiere describir, de manera muy aproximada este movimiento de la cola, como una perturbación de una cuerda, es decir, analizaremos un modelo teórico descrito por la figura 2. Justificando que el aleteo no es muy amplio, y que sólo tomaremos en cuenta un “impulso” (el cuerpo o borde más cercano a la cabeza, no oscila, está fijo).



Figure 2: El modelo del pez

i) Si suponemos ahora que la tensión es de alguna manera constante en toda la cuerda, y que esta es uniforme, ¿cuál debería ser la condición de borde en $x = L$, para que se cumpla la restricción del diagrama 2?. Lo anterior no es obvio ni muy directo, discútalo en clase auxiliar.

ii) Con la condición anterior y la solución general de la ecuación de ondas analizada en cátedra encuentre una expresión genérica para la deformación (algo similar, a una cuerda de guitarra), ¿cómo difieren las soluciones?, grafique.

Problema 142

Sea una cuerda infinita de densidad de masa lineal σ_1 para $x < 0$ y σ_2 para $x > 0$, que, además, está sometida a una tensión τ constante a lo largo de ella.

Al enviar una onda viajera o progresiva desde la izquierda ($x < 0$), cuando esta onda llega a $x = 0$ parte de ella es reflejada y parte de ella es transmitida (o refractada). El objeto de este problema es ver cuanto es reflejado y cuanto transmitido en función de $c_1 = \tau/\sigma_1$ y $c_2 = \tau/\sigma_2$.

Para ello debemos separar la solución $\zeta(x, t)$ en una función $\zeta_1(x, t)$ para $x < 0$ y otra $\zeta_2(x, t)$ para $x > 0$, siendo $\zeta(x, t)$ continua y derivable en $x = 0$.

Suponga que el sistema oscila con una misma frecuencia ω y que las soluciones son

$$\zeta_1(x, t) = A \sin\left(\frac{\omega}{c_1}(x - c_1 t)\right) + R \sin\left(\frac{\omega}{c_1}(-x - c_1 t)\right)$$

y

$$\zeta_2(x, t) = T \sin\left(\frac{\omega}{c_2}(x - c_2 t)\right)$$

siendo A, R y T las amplitudes de la onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente.

Muestre que

$$\frac{R}{A} = \frac{1 - \frac{c_2}{c_1}}{1 + \frac{c_2}{c_1}}$$

y

$$\frac{T}{A} = \frac{2}{1 + \frac{c_2}{c_1}}$$

Encuentre la fracción de la potencia transmitida a la zona con $x > 0$.

Problema 143

Sea el problema de valores propios:

$$T\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda\phi$$

donde $\phi(x=0) = \phi(x=L) = 0$.

i) encuentre los valores λ_n y vectores propios $\phi_n(x)$.

ii) muestre que los vectores propios $\phi_n(x)$ son una base ortonormal bajo el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$.

iii) muestre que toda función $f(x) = f(x+2L)$ es combinación lineal de los vectores propios $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$, encuentre los a_n .

iv) Muestre que la Traza de T es $Tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sim \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx$.

v) Sea $\zeta_T(s) = Tr(T^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}$ muestre que el determinate de T es: $det(T) = \lim_{s \rightarrow 0} \exp(-\zeta_T'(s))$.

Problema 144

Muestre que para una solución general para la oscilación de una cuerda atada en $x=0$ y en $x=L$, $\zeta(x,t) = \sum_{n=1} a_n \sin(n\pi x/L) \cos(\omega_n t + \delta_n)$ la energía total es la suma de las energías de cada modo:

$$E = \frac{\sigma}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \sum_{n=1} E_n$$

.

Problema 145

Sea el problema de valores propios:

$$T\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda\phi$$

donde $\frac{d\phi}{dx}(x=0) = \frac{d\phi}{dx}(x=L) = 0$.

i) encuentre los valores λ_n y vectores propios $\phi_n(x)$.

ii) muestre que los vectores propios $\phi_n(x)$ son una base ortonormal bajo el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$.

iii) muestre que toda función $f(x) = f(x+2L)$ es combinación lineal de los vectores propios $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$, encuentre los a_n .

Problema 146

Una persona A genera sonido induciendo oscilaciones en el aire encerrado en el interior de un tubo cilíndrico de 20 cm de largo.

i) Si las oscilaciones inducidas corresponden al segundo modo normal de oscilación, determine la frecuencia del sonido emitido.

ii) Supongamos que la persona A se encuentra sobre un carrito abierto que se mueve con velocidad v hacia una gran pared. ¿Cuál es la frecuencia del eco que escucha A ? (Suponga que no corre viento).

ii) Una persona B se encuentra entre el carrito y la pared. ¿Con qué frecuencia escuchará B el sonido directamente emitido por A y el eco que rebota de la pared?

Problema 147

Un plomero debe destapar un tubo que se encuentra obstruido. Al soplar por encima de la apertura del tubo, escucha un sonido de 200 Hz. ¿A qué distancia de la apertura se encuentra la obstrucción?

Problema 148

Un día de verano, en que corre un viento sur de 30 km/hora, un automovilista viaja a 100 km/hora hacia el norte. Al hacer sonar la bocina, el chofer al interior del automóvil, la escucha emitiendo un sonido de 440 Hz. ¿Con qué frecuencia percibe el sonido una persona, parada junto a la carretera, antes y después de que haya pasado el automóvil?

Problema 149

Un automóvil se mueve con velocidad v hacia un observador A fijo. Se hace sonar la bocina del automóvil, cuya frecuencia es ν_0 . Encuentre la frecuencia del sonido detectado por A , si corre un viento v' en la misma dirección en que avanza el automóvil.

Problema 150

Una persona observa un avión supersónico que vuela horizontalmente con velocidad constante. 10 segundos después de pasar por encima de su cabeza, escucha la "explosión supersónica" del cono de Max. Si en ese instante el avión forma un ángulo de 30° con la normal, ¿cuál es la velocidad del avión y a qué altura está volando?