

Introducción a la Física Fi10a

Guía 16

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Mauricio Cerda, Carlos Orellana y Nicolas Reyes

Problema 91

Supongamos que se ha podido construir un túnel que une la ciudad de Santiago con Ulan Bator (la capital de Mongolia). Este túnel pasa en la mitad de su recorrido por el centro de la tierra.

Para enviar una persona de masa m hasta Mongolia sólo es necesario que la persona caiga dentro del túnel.

Se pide determinar:

- i)* Cuánto tiempo demora la persona en llegar a Mongolia?
- ii)* Qué tipo de movimiento realizará la persona dentro del túnel?
- iii)*Cuál será la velocidad máxima que alcanzará la persona, dónde y cuándo ocurrirá?

Problema 92

El objetivo de este problema es aplicar las leyes de Newton a un modelo simple de galaxia espiral y contrastar con observaciones recientes. Lo anterior presenta un dilema, aún hoy día sin resolver. Aparentemente el Universo tendría mucha más masa de la estimada hasta ahora.

i) Suponga una galaxia se puede ver como una esfera de densidad uniforme ρ (aquí se supone que en las partes luminosas, hay masa, y en las zonas oscuras la masa es despreciable) luego determine la velocidad de una estrella que orbita en la región del núcleo en forma circular.

ii) Ahora lo mismo, pero para una estrella que orbita fuera de la región del núcleo (toda la masa se concentra en un punto). Construya un gráfico, Velocidad de la órbita vs. radio.

iii) El modelo anterior predice ciertas velocidades a una determinada distancia de una galaxia espiral. Mediciones recientes permiten construir un gráfico experimental de *ii)*

Es decir, no concuerda con el modelo construido en *ii)*. Manteniendo la validez de las Leyes de Newton, el supuesto de la relación masa-luz, no sería correcto. Suponer el núcleo tenga densidad constante pareciera estar bien, pero no, afirmar que fuera de este la masa sea despreciable. Imponga que fuera del núcleo existe una distribución de masa $M(r)$, y que la velocidad con que orbitan en esa zona debe ser una constante (como se ve aproximadamente en el gráfico). Encuentre este $M(r)$.

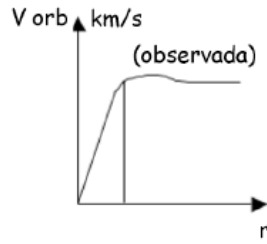


Figure 1: Mediciones actuales

Existen algunas hipótesis para explicar esta expresión, como la existencia de masa oscura: agujeros negros o algún tipo de partícula aún no detectada. Comente en clase auxiliar.

Problema 93

Una partícula de masa m se mueve en un potencial central atractivo $V(r) = -\frac{\lambda}{r^n}$ con $n > 2$. Reduzca las ecuaciones de movimiento a un problema unidimensional. Discutir cualitativamente la naturaleza de las órbitas para diferentes valores de la energía y momentum angular.

Problema 94 Ya que saben derivar...

Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio R a causa de una fuerza centrípeta $f(r)$ entre la partícula y un punto O en la circunferencia misma.

Muestre que $f(r) \sim \frac{1}{r^5}$.

Problema 95 A derivar más...

Encuentre la ley de fuerza central que permite a una partícula moverse en una órbita espiral dada por $r = C\varphi^2$, con C una constante.

Problema 96 Producto \times

Sean $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ dos vectores en R^3 . Se define

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_z) \equiv (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_z)\hat{z}.$$

Muestre que:

i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

ii) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi_{ab}$, donde φ_{ab} es el ángulo entre los vectores \vec{a} y \vec{b} .

iii) Si $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, $\lambda \in R$ entonces $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

iv) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ donde $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ es el determinante de la matriz 3×3 cuyas filas (o columnas) son $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en orden.

v) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$, entonces $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}) = 0$.

vi) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

vii) Si $\vec{a}(s)$ y $\vec{b}(s)$ son funciones de $R \rightarrow R^3$ tal que $s \rightarrow \vec{a}(s)$ y $\vec{b}(s)$, entonces

$$\frac{d}{ds}(\vec{a}(s) \times \vec{b}(s)) = \frac{d\vec{a}(s)}{ds} \times \vec{b}(s) + \vec{a}(s) \times \frac{d\vec{b}(s)}{ds}.$$

Problema 97

Suponga una partícula que se mueve bajo la acción del potencial de Kepler, $V(r) = -GMm/r$. El vector de Runge-Lenz está definido como :

$$\vec{K} = \vec{v} \times \vec{L} - GMm \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

en que \vec{r} es el vector posición de la partícula, \vec{v} su velocidad, y \vec{L} su momentum angular.

i) Demuestre que \vec{K} es una constante de movimiento, i.e., que $d\vec{K}/dt = 0$.

ii) Encuentre la expresión de \vec{K} en coordenadas polares. ¿Cuánto vale \vec{K} para el caso de una órbita circular?

iii) Luego utilice esta expresión, y el hecho que \vec{K} es una constante para obtener la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$ que describe la órbita de la partícula.

Pregunta.....

Un rayo de luz con velocidad c pasa muy cerca de un planeta de radio R y masa M , cuál es el valor de la constante de movimiento $h = rv_\varphi$? Cuánto vale la excentricidad? Qué puede decir del ángulo de deflexión que sufre el rayo de luz? Qué masa debe poseer el planeta para que el rayo de luz orbite en torno a la tierra?