

Introducción a la Física Fi10a

Guía 13

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Mauricio Cerda, Carlos Orellana y Nicolas Reyes

Problema 69

Muestre el siguiente teorema: Toda fuerza centrípeta (quizas conocida por fuerzas centrales) es conservativa.

Para ello escriba $\vec{F}(\vec{r}) \equiv f(|\vec{r}|)\hat{r}$, donde $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, y $f(r)$ es una función cualquiera.

Muestre ahora que este cálculo no depende de la posición del centro de fuerzas mostrando que es independiente de elegir $\vec{r} - \vec{r}_0$ en vez de \vec{r} .

Finalmente muestre que la suma de N fuerzas centrípetas:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

es conservativa.

Problema 70

Usando el método geométrico descrito en clases, encuentre las órbitas para las fuerzas radiales :

i) $\vec{F} = cte\hat{r}$ (o del movimiento en la superficie de un cono.)

ii) $\vec{F} = -k\vec{r}$ (o del de un péndulo en pequeñas oscilaciones).

iii) $\vec{F} = -k\frac{\vec{r}}{r^3}$ (o gravitacional).

Problema 71

Escriba un código numérico para resolver el movimiento en el plano $x(t)$ & $y(t)$ de una masa $m = 1$ que se mueve bajo la atracción gravitacional: $F_x = -x/(x^2 + y^2)^{3/2}$ & $F_y = -y/(x^2 + y^2)^{3/2}$ del centro S situado en $x = 0$ & $y = 0$.

Use diferentes condiciones iniciales para obtener órbitas con diferentes semi-ejes y verifique la tercera ley de Kepler $T^2 = 4\pi^2 a^3$ donde T es el período y a el semi-eje mayor de la órbita elíptica.

Modifique ligeramente la fuerza anterior por

$$F_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(1 + \alpha \frac{x}{(x^2 + y^2)^{n/2}} \right)$$

&

$$F_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(1 + \alpha \frac{x}{(x^2 + y^2)^{n/2}} \right),$$

para $n = 1$ y α pequeño, qué observa?

Problema 72

Una masa m puede deslizarse sin roce en un aro circular de radio a . Si el aro gira con velocidad angular uniforme ω paralela a la gravedad, encuentre el ángulo que forma la posición de la masa en el aro respecto de la vertical. Qué pasa para $\frac{a\omega^2}{g} \ll 1$.

Problema 73

Un planeta se mueve por una elipse, en cuyo foco se encuentra el Sol. Teniendo en cuenta el trabajo de la fuerza de gravitación, indicar, en qué punto de la trayectoria la velocidad del planeta será máxima y en qué punto será mínima?

Problema 74

Se lanza un proyectil de masa m desde la superficie terrestre, formando un ángulo α con la vertical. La velocidad inicial del proyectil es $v_0 = \sqrt{GM/R}$ donde M y R son, respectivamente la masa y el radio de la Tierra. Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?