

Introducción a la Física Fi10a

Guía 12

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Mauricio Cerda, Carlos Orellana y Nicolas Reyes

Problema 60

Muestre que la fuerza en el plano x, y :

$$F_x(x, y) = k \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \& \quad F_y(x, y) = k \frac{x}{x^2 + y^2}$$

no es conservativa. En particular muestre que

$$\sum_C \vec{F}(\vec{x}_{n+1}) \cdot \left(\frac{\vec{x}_{n+2} - \vec{x}_n}{2} \right)$$

es igual a cero $\forall C$ si C **no** encierra el origen $x = y = 0$, o es igual a $2\pi k$, $\forall C$ si C encierra el origen $x = y = 0$ y recorre en la dirección contraria a las agujas del reloj.

Problema 61

Muestre que si sobre un cuerpo actúan tanto fuerzas conservativas $\vec{F}_C(\vec{x})$ como fuerzas no-conservativas $\vec{F}_{noC}(\vec{x})$, y se define la energía mecánica como $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(x, y, z)$ donde $U(x, y, z)$ es la llamada energía potencial de las fuerzas conservativas, entonces el cambio de energía mecánica para ir de A a B por un camino $C_{A \rightarrow B}$ es igual, pero con signo contrario, al trabajo de las fuerzas no-conservativas, es decir:

$$E_A - E_B = \left(\frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 + U(x_A, y_A, z_A) \right) - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 + U(x_B, y_B, z_B) \right) = -W_{A \rightarrow B} = \sum_{C_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{noC}(\vec{x}_{n+1}) \cdot \left(\frac{\vec{x}_{n+2} - \vec{x}_n}{2} \right).$$

Problema 62

i) De la relación matemática siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

muestre que para $\varphi \ll 1$ se tiene:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \quad \& \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} \dots$$

ii) A partir de esto muestre que la energía de un péndulo de largo ℓ , masa m que realiza oscilaciones pequeñas alrededor de la vertical (y en un plano), es aproximadamente igual (o equivalente) a la del un resorte de constante elástica $k = \frac{mg}{\ell}$, largo natural nulo y que realiza un desplazamiento $\ell\varphi$.

iii) Si φ deja de ser pequeño, cómo varía aproximadamente el período de oscilación de un péndulo en función de su amplitud inicial?

Problema 63

El alumno Santamaría sostiene una pelota de bowling frente a su nariz, la pelota de 25 cm de diámetro y 15 kilogramos está atada a un hilo de 7 metros. La altura del cielo es de 8 metros. El joven confiadamente suelta la bola.

La bola sufre resistencia del aire $F = C_D \rho_{aire} R^2 v^2$ donde $C_D \approx 0.4$ es una constante, $\rho_{aire} \approx 1 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del aire, R el radio de la bola y v su velocidad.

i) Estime el trabajo realizado por la fuerza de fricción del aire. Para ello aproximaremos el movimiento por el del mismo péndulo pero en vacío.

ii) A qué distancia de la nariz llega la bola?

NB. La altura piso-nariz del joven Santamaría es approx 1.60 metros.

Problema 64

Una partícula de masa m , que puede moverse sobre un riel horizontal y está unida a un resorte cuyo otro extremo está fijo al punto A a una distancia vertical ℓ del riel. El largo natural del resorte es ℓ_0 .

Si $\ell > \ell_0$:

i) encuentre los puntos de equilibrios.

ii) Cuál es la frecuencia para oscilaciones pequeñas alrededor de los puntos de equilibrios ?

Si $\ell < \ell_0$:

iii) encuentre los puntos de equilibrios.

iv) Cuál es la frecuencia para oscilaciones pequeñas alrededor de los puntos de equilibrios ?

v) Qué sucede para $\ell \equiv \ell_0$?

Problema 65

En el libro “De la tierra a la Luna”, de Julio Verne, se dispara un enorme cañon para enviar a 3 tripulantes a la Luna dentro de una bala esférica. En dicho libro un personaje afirma haber calculado la velocidad inicial necesaria para emprender tal viaje, 12.000 yardas (aprox 11.000 metros) por segundo.

i) Estime la velocidad inicial que se le debe dar a un cuerpo para que escape a la gravedad terrestre, es decir, llegue al espacio. A esta velocidad se le llama “velocidad de escape”. (hint: utilizar la conservación de la energía y considerar la energía muy lejos de la tierra como cero).

ii) Estime el peso y la fuerza de fricción del aire en la Nave de Julio Verne.

iii) Actualmente existe un concurso mundial (de premio US\$ 10 millones, www.xprize.org) a quien lleve al espacio (100 km de altitud) a la primera nave civil reutilizable (que repita el viaje en 2 semanas con el mismo equipo) llevando 3 tripulantes a bordo. ¿Con el cañon de Julio Verne, y los cálculos recién realizados, sería posible realizar un viaje de estas características?, comente al respecto.



Figure 1: Nave Beaucchef-1, Santiago, Chile

Problema 66

Muestre que el período de las oscilación, en función de la energía E , del movimiento unidimensional de una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza impresa $F(x) = A|x|^{n-2}x$ es proporcional a

$$T \sim \sqrt{\frac{m}{E}} \left(\frac{E}{A} \right)^{1/n}.$$

Problema 67

Un Bloque de masa M se mueve con velocidad v_0 sobre una superficie horizontal sin fricción hacia un resorte con constante elástica k y masa insignificante unido a una pared. Calcule la distancia

máxima que se comprime el resorte. Cuál es la velocidad a la mitad de la distancia anterior?, ¿Cuan comprimido está el resorte cuando la velocidad es $v_0/2$? Si el largo natural del resorte es ℓ_0 , calcule el valor máximo de v_0 para que el bloque no choque con la pared. Cómo se modifican sus resultados si hay roce dinámico entre la superficie y el bloque? Cuál es la condición sobre v_0 para que el bloque pueda volver?

Problema 68

Un grupo de estudiantes empuja a un alumno sentado en una silla provista de ruedas sin fricción para subirlo 3 m por una rampa de inclinada 30° sobre la horizontal. La masa del profesor y la silla es de 80 kg . Los estudiantes aplican una fuerza horizontal constante de 600 N . La rapidez inicial del profesor es de 2 m/s . Usando argumentos energéticos calcule la velocidad final del profesor.