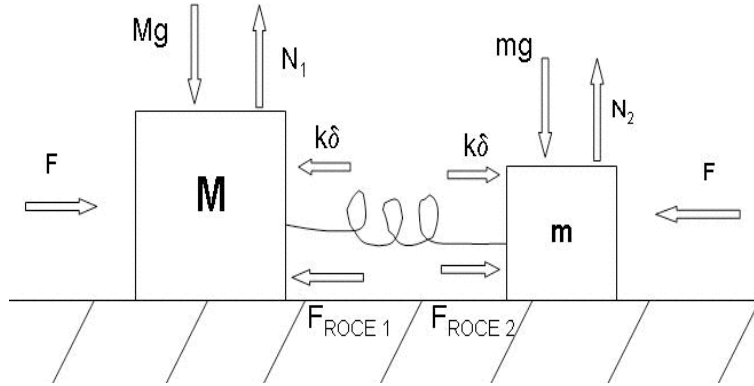


## Solución Guía 9, v1

### Problema 42

El resorte se comprime una distancia  $\delta$ ; luego el DCL sobre ambas masas es:



Inicialmente ambas masas están en reposo, luego las ecuaciones son:

Para  $M$ :

$$F = F_{roce1} + K\delta$$

$$|F_{roce1}| \leq \mu Mg$$

Para  $m$ :

$$F = F_{roce2} + K\delta$$

$$|F_{roce2}| \leq \mu mg$$

Notemos que ambas fuerzas de roce están obligadas a ser iguales.

Llamemos  $X_1$  la posición de  $M$  (medida hacia la izquierda) y  $X_2$  la posición de  $m$  (medida hacia la derecha).

Cuando desaparece la fuerza  $F$  las ecuaciones son:

Para  $M$ :

$$M\ddot{X}_1 = F_{roce1} + K\delta$$

$$|F_{roce1}| \leq \mu Mg$$

Para  $m$ :

$$m\ddot{X}_2 = F_{roce2} + K\delta$$

$$|F_{roce2}| \leq \mu mg$$

Notemos que  $m \leq M$ . Dada esta situación existen tres posibles resultados:

1. Supongamos que:  $K\delta < \mu mg$  entonces  $K\delta < \mu Mg$ . Luego ambas fuerzas de roce se "adaptaran" para evitar el movimiento, es decir:  
 $F_{roce1} = F_{roce2} = -K\delta$  y por lo tanto  $\ddot{X}_1 = \ddot{X}_2 = 0$ .
2. Supongamos que  $K\delta > \mu mg$  y que  $K\delta < \mu Mg$ . Luego las ecuaciones para ambas masas son:

$$\ddot{X}_1 = 0 \text{ y } \ddot{X}_2 = \frac{\mu mg + K\delta}{m}$$

3. Supongamos que  $K\delta > \mu Mg$  luego  $K\delta > \mu mg$ . Luego las ecuaciones para ambas masas son:

$$\ddot{X}_1 = \frac{\mu Mg + K\delta}{M} \text{ y } \ddot{X}_2 = \frac{\mu mg + K\delta}{m}$$

Notemos que en este caso ambas masas se mueven aunque  $m$  tiene mayor aceleración que  $M$ .

#### Problema 44

Observando el cuadrado en un pequeño instante de tiempo  $t$ , podemos suponer que el movimiento de las chinitas fue recto en ese tiempo pequeño y luego cambio de dirección. Entonces podemos ver que se forma un triángulo rectángulo, lo que permite tener una ecuación para las variables de interés.

$$l_{n+1}^2 = (l_n - vt)^2 + (v\Delta t)^2 \quad (1)$$

Ahora, desarrollando la expresión anterior y sacando raíz obtengo que:

$$l_{n+1} = \sqrt{l_n^2 - 2l_nv_0\Delta t + 2v_0^2\Delta t^2} \quad (2)$$

Notando que el termino  $\Delta t$  es muy pequeño, los terminos de orden 2 es decir donde aparezca  $(\Delta t)^2$  se desprecian pues son casi cero, con lo cual la ecuación se transforma en:

$$l_{n+1} = \sqrt{l_n^2 - 2l_nv_0\Delta t} \quad (3)$$

La expresión anterior aún nos resulta inmanejable, por lo que la escribiremos de otra forma:

$$l_{n+1}^2 = l_n^2 - 2l_nv_0\Delta t \quad (4)$$

Despejando

$$l_{n+1}^2 - l_n^2 = -2l_nv_0\Delta t \quad (5)$$

Ahora factorizo como

$$(l_{n+1} - l_n)(l_{n+1} + l_n) = -2l_nv_0\Delta t \quad (6)$$

Afirmando que,  $l_{n+1} = l_n - \alpha\Delta t$  con  $\alpha$  una cierta constante, esto quiere decir que el nuevo largo del cuadrado es el antiguo, menos un termino de orden  $\Delta t$  (algo pequeño). Ahora si uso esto en la ecuación anterior puedo decir que (reemplazando)

$$(l_{n+1} - l_n)(l_{n+1} + l_n) = (l_{n+1} - l_n)(2l_n - \alpha\Delta t) = -2l_nv_0\Delta t \quad (7)$$

Pero esto lo puedo desarrollar un poco (multiplicar), hasta llegar a

$$(l_{n+1} - l_n)(2l_n - \alpha\Delta t) = 2l_n(l_{n+1} - l_n) - (l_{n+1} - l_n)\alpha\Delta t \quad (8)$$

El segundo termino del lado derecho de la ecuación es del orden de  $(\Delta t)^2$  pues  $l_{n+1} - l_n$  es de orden  $\Delta t$  por la afirmación de que  $l_{n+1} = l_n - \alpha\Delta t$ . Ahora podemos despreciar ese término para obtener la siguiente ecuación:

$$2l_n(l_{n+1} - l_n) = -2l_nv_0\Delta t \quad (9)$$

Simplificando un poco...

$$l_{n+1} - l_n = -v_0\Delta t \quad (10)$$

Lo que llamaremos, ecuación 1.

Ahora esta es una ecuación es para el largo del cuadrado en función del tiempo, pero necesitamos algo en función del ángulo, ¿dónde buscar algo así?, veamos el ángulo de giro entre dos instantes de tiempo:

$$\tan(\phi_{n+1} - \phi_n) = \frac{\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)}{\cos(\phi_{n+1} - \phi_n)} \quad (11)$$

La expresión anterior la puedo aproximar, con  $\sin(\phi_{n+1} - \phi_n) \approx \phi_{n+1} - \phi_n$ , lo cual se puede ver del dibujo de la función  $\sin(x)$ , cerca de cero, se parece a la recta identidad. Además  $\cos(\phi_{n+1} - \phi_n) \approx 1$  por un argumento análogo (la manera más simple de ver esto sería graficar, un ejercicio que les

recomendamos bastante! =), bueno, ya tenemos una aproximación para  $\tan(\phi_{n+1} - \phi_n) \approx \phi_{n+1} - \phi_n = \Delta\phi$ , pero, ¿qué es eso?, una pregunta razonable, la idea es geométricamente, identificar a  $\tan(\Delta\phi)$  como la tangente del ángulo del giro del cuadrado, lo interesante sería ver quienes son el cateto opuesto y adyacente en la figura se ve que podemos escribir:

$$\tan(\Delta\phi) \approx \Delta\phi = \frac{v_0 \Delta t}{l_n} \quad (12)$$

Lo anterior lo llamaremos, ecuación 2. Ahora escribiremos la expresión dada por la división de la ecuación 1 y la ecuación 2:

$$\frac{l_{n+1} - l_n}{\Delta\phi} = -l_n \quad (13)$$

Podemos expresar dicha ecuación como

$$l_{n+1} = l_n(1 - \Delta\phi) \quad (14)$$

Nos interesa calcular  $l_n$ , partiendo de  $l_0 = l_0$ , y luego tomar el límite a dicha expresión, desarrollando tenemos que

$$l_n = l_0(1 - \Delta\phi)^n \quad (15)$$

Si afirmamos que  $n\Delta\phi = \phi$ , la ecuación anterior la podemos escribir como

$$l_n = l_0\left(1 - \frac{\phi}{n}\right)^n \quad (16)$$

Tomando el límite de n a infinito, tenemos un límite conocido

$$l(\phi) = l_0 \exp^{-\phi} \quad (17)$$

Ahora podemos mostrar que las chinitas dan un número infinito de vueltas para poder estar todas juntas. pues esto sucede cuando  $l = 0$  pero esto sucede según nuestra ecuación anterior solamente cuando el ángulo que ha girado el cuadrado es infinito. La segunda parte la podemos ver como sigue. Sabemos cuanto vale el largo del cuadrado en cada instante de tiempo, y que la distancia de separación entre dos chinitas, es siempre la distancia del largo del cuadrado en ese instante, es decir en forma directa de la ecuación anterior podemos afirmar que la separación entre dos chinitas es

$$l_0 \exp^{-\phi} \quad (18)$$

Problema 45

El problema trata de una bola de masa  $M$ , radio  $R$ , que cae debido a gravedad  $g$  en un fluido de viscosidad  $\mu$ . Luego la ecuación de movimiento de la partícula es:

$$M\ddot{X} = c\dot{X}^2 - Mg$$

donde  $c$  corresponde a una función de  $R$  y  $\mu$ , ( $c = R\mu$ ) Escribiendo la ecuación de diferencias resulta:

$$M \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} = cv_n^2 - Mg \quad (19)$$

Sea el siguiente cambio de variable:

$$v_n = a + bu_n \quad (20)$$

Reemplazando (20) en (19) se obtiene:

$$\frac{bM}{\tau}(u_{n+1} - u_n) = c(a + bu_n)^2 - Mg$$

Desarrollando (sólo es álgebra, no se asusten):

$$u_{n+1} = \frac{\tau}{bM}(ca^2 - Mg) + u_n \left( \frac{2ac\tau + M}{M} \right) + u_n^2 \left( \frac{cb\tau}{M} \right) \quad (21)$$

El objetivo de realizar este cambio de variable es llegar a una ecuación de la forma:

$$u_{n+1} = \lambda u_n - \lambda u_n^2$$

Luego se debe cumplir que (recuerden como se igualan dos polinomios):

$$ca^2 = Mg$$

$$\lambda = 2ac\tau + M = cb\tau$$

Despejando se obtienen las variables  $a$  y  $b$  que debo escoger para realizar el cambio de variable :

$$a = \sqrt{\frac{Mg}{c}}$$

$$b = \frac{2ac\tau + M}{c\tau}$$

Ahora, notar que  $a$  tiene unidades de velocidad, y que  $b$  también las tiene, es decir  $u$  es adimensional! (plop)

Y finalmente el valor de  $\lambda$  es:

$$\lambda = 2\tau\sqrt{Mgc} + M$$

Recuerden que existe un rango valido para  $\lambda$ , comenten sobre el significado de este, (la ecuación a diferencias debe siempre reflejar lo que físicamente debería suceder, esto es, que la partícula disminuya su velocidad hasta un equilibrio) fijense especialmente en el valor de  $\tau$ . Además recuerden que  $c$  tiene un valor en función de las variables físicas del problema ( $R$ ,  $M$  y  $\mu$ ).

Problema 46

Podemos escribir la ecuación en los dos ejes según la expresión que entrega el enunciado, pero por lo que nos piden mostrar sólo nos interesa lo que sucede en el eje  $x$ , en donde sólo actúa la fuerza de arrastre y no el peso ( $a_x$  es la aceleración en el eje  $x$ ).

$$ma_x = -k\mu Rv_x \quad (22)$$

La idea es ahora obtener una expresión para la velocidad en un cierto tiempo en ese eje, sabemos, por lo que conocemos de la vida diaria de las fuerzas de roce, que cualquiera sea la forma que obtengamos de la velocidad, esta debe respetar nuestra intuición, esto es, para un  $t$  suficientemente grande, la velocidad debe ser cero, teniendo esto presente comencemos a desarrollar.

Si escribimos la ecuación anterior como como diferencias, se tiene que ( $\gamma = \frac{k\mu R}{m}$ ):

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} = -\gamma v_n \quad (23)$$

Despejando se tiene que

$$v_{n+1} = v_n(1 - \gamma\tau) \quad (24)$$

Ahora se comenzará a iterar partiendo de la velocidad inicial en el eje  $x$ , esto es  $v_0 \cos(\alpha)$ , notar que se iterará en intervalos  $\tau$ , esto es, se avanzará en intervalos iguales de tiempo en cada iteración

$$v(\tau) = v_0 \cos(\alpha)(1 - \gamma\tau) \quad (25)$$

Luego,

$$v(2\tau) = v_1(1 - \gamma\tau) \quad (26)$$

Si seguimos iterando llegamos a que

$$v(n\tau) = v_0 \cos(\alpha)(1 - \gamma\tau)^n \quad (27)$$

Reescribiendo la ecuación anterior y con  $t = n\tau$

$$v(t) = v_0 \cos(\alpha) \left(1 - \frac{\gamma t}{n}\right)^n \quad (28)$$

De lo anterior tomamos el límite cuando  $n$  se va a infinito, lo cual es algo conocido, de esta forma podemos escribir que

$$v(t) = v_0 \cos(\alpha) \exp^{-\gamma t} \quad (29)$$

Recordando como fuimos construyendo esa expresión, retomamos la idea de que es la velocidad en el eje  $x$ , y además para un  $t$  grande, es efectivamente, como habíamos predicho en un comienzo sólo con la intuición, cero. Ahora la idea es aprovechar la expresión anterior, para poder calcular cuanto avanza en el eje  $x$  antes de detenerse (algo así como la distancia de frenado en un auto si

pudieramos afirmar que el arrastre de Stokes denota un freno, podría ser algo así?). Escribamos de inmediato la ecuación de diferencias:

$$v(t) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = v_0 \cos(\alpha) \exp^{-\gamma t} \quad (30)$$

Despejando  $x_{n+1}$  tenemos que,

$$x_{n+1} = \tau v_0 \cos(\alpha) \exp^{-\gamma t} + x_n \quad (31)$$

Ahora, análogamente a la situación anterior, avancemos en intervalos iguales  $\tau$ , y partiendo de  $x_0 = 0$  (pues queremos calcular cuanto avanza en ese eje desde el lanzamiento)

$$x_1 = \tau v_0 \cos(\alpha) \exp^{-\gamma \tau} + 0 \quad (32)$$

$$x_2 = \tau v_0 \cos(\alpha) \exp^{-\gamma 2\tau} + x_1 \quad (33)$$

$$\dots \quad (34)$$

$$(35)$$

$$x_n = \tau v_0 \cos(\alpha) \sum_{i=1}^n (\exp^{-\gamma \tau})^i \quad (36)$$

La sumatoria anterior se denomina suma geométrica, y tiene una forma conocida:  $\sum r^i = \frac{1}{1-r}$  si se tiene que  $r < 1$  en módulo (la sumatoria es de  $i = 0$  hasta *infinito*). Lo pueden ver analizando cuanto vale  $\sum r^i - r \sum r^i$ . Con el resultado anterior podemos expresar

$$x_n = \frac{v_0 \cos(\alpha) \tau}{1 - \exp^{-\gamma \tau}} \quad (37)$$

Ahora viene la parte interesante, pues si tendemos  $\tau$  a cero nos encontramos con algo de la forma  $\frac{0}{0}$  lo que no tenemos forma aún de calcular. Otra idea sería utilizar el hecho de que  $\gamma \tau$  es un término tan pequeño como queramos (estamos haciendo tender  $\tau$  a cero!). ¿Cómo podemos liberarnos del término que nos complica  $\exp^{-\gamma \tau}$ ? Cada función la podemos expresar como una suma de términos, en particular, la función anterior es muy conocida y célebre (por tener muchas propiedades especiales, etc.) y es de la forma:

$$\exp^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \quad (38)$$

Obtener algo así no es para nada directo, ni fácil (pero si es simple verificarlos gráficamente), pero sus implicaciones son variadas, de alguna forma (que aún no conocemos) cada función por muy complicada que esta sea siempre la podremos escribir como un polinomio de cierta forma, que tantos términos tenga este polinomio dependerá de cuanta exactitud necesitemos. Para poder ver

mejor este resultado hagamos un gráfico comparativo entre la función exacta  $\exp^x$  y de  $1 + x + \frac{x^2}{2!}$  con  $x$  entre 0 y 1 (ver figure 1). Notar que tomamos sólo dos términos de la serie, esto es, podemos esperar sólo un parecido entre ambas funciones

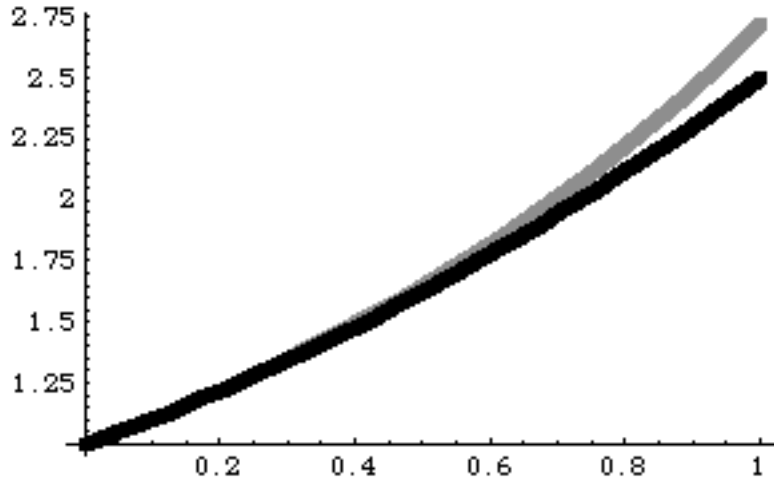


Figure 1: En plomo  $\exp^x$ , en negro  $1 + x + \frac{x^2}{2!}$

Con esto ya podemos afirmar que

$$\exp^{-\gamma\tau} = 1 + (-\gamma\tau) + \frac{(-\gamma\tau)^2}{2!} + \frac{(-\gamma\tau)^3}{3!} + \dots \quad (39)$$

Podemos utilizar el hecho que  $\gamma\tau$  es un termino pequeño y despreciar los términos de orden 2, con lo que la ecuación anterior nos queda como:

$$\exp^{-\gamma\tau} \approx 1 + (-\gamma\tau) \quad (40)$$

Lo anterior lo podemos utilizar en nuestra ecuación para  $x_n$

$$x_n = \frac{v_0 \cos(\alpha) \tau}{1 - (1 + (-\gamma\tau))} \quad (41)$$

$$x_n = \frac{v_0 \cos(\alpha) \tau}{\gamma\tau} \quad (42)$$

$$x_n = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\gamma} \quad (43)$$

Con lo anterior ya mostramos la distancia máxima que se recorre antes de parar en el eje x.

Hasta una próxima guía!, los auxiliares, CMN