

Problema 22

El bote se desplaza de izquierda a derecha con velocidad v , y el pajarito inicialmente de derecha a izquierda con velocidad u . La primera vez el punto de encuentro es tal que:

$$ut_0 + vt_0 = d \Rightarrow t_0 = \frac{d}{u+v} \quad (1)$$

La gaviota en el primer viaje, si $u > v$ recorre una distancia

$$d_1 = 2ut_0 \quad (2)$$

Reemplazando la ecuación 1 en 2 se tiene que (distancia recorrida por el pájaro en el primer viaje):

$$d_1 = \frac{2ud}{u+v} \quad (3)$$

Cuando la gaviota vuelve a la orilla, el barco se encuentra a una distancia

$$x_1 = d - 2vt_0 = d \frac{u-v}{u+v} \quad (4)$$

Ahora el problema se va repitiendo pero con un nuevo valor de la distancia que separa al pájaro y al bote, con lo cual podemos afirmar que:

$$d_2 = \frac{2u}{u+v} x_1 \quad (5)$$

$$x_2 = \frac{u-v}{u+v} x_1 = d \left(\frac{u-v}{u+v} \right)^2 \quad (6)$$

$$d_3 = \frac{2u}{u+v} x_2 = d \frac{2u}{u+v} \left(\frac{u-v}{u+v} \right)^2 \quad (7)$$

$$x_3 = d \left(\frac{u-v}{u+v} \right)^3 \quad (8)$$

Como se vé en las ecuaciones anteriores se va repitiendo una cierta forma (recurrente) en las ecuaciones, lo anterior lo podemos resumir como

$$d_N = \frac{2ud}{u+v} \left(\frac{u-v}{u+v} \right)^{N-1} \quad (9)$$

Hemos calculado la distancia n -ésima que recorre el pajarito, pero lo que interesa es saber la distancia total, esto es la suma de todas las distancias.

$$d_T = d_1 + d_2 + \dots + d_N + \dots \text{ hasta infinito} \quad (10)$$

Reemplazando los valores de cada una de las distancias recorridas (ver ecuación 9) y factorizando se tiene que:

$$d_T = \frac{2ud}{u+v} \left(1 + \left(\frac{u-v}{u+v} \right) + \left(\frac{u-v}{u+v} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u-v}{u+v} \right)^N + \dots \right) \quad (11)$$

Lo anterior se reconoce como una suma "geométrica", las cuales tienen una expresión conocida (al menos desde ahora)

$$d_T = \frac{2ud}{u+v} \left(\frac{1}{1 - \frac{u-v}{u+v}} \right) = \frac{2ud}{u+v} \left(\frac{u+v}{u+v - u + v} \right) \quad (12)$$

Simplificando se tiene que:

$$d_T = d \frac{u}{v} \quad (13)$$

Para lo anterior se utilizó que $\sum r^i = \frac{1}{1-r}$ si se tiene que $r < 1$ en módulo (la sumatoria es de $i = 0$ hasta *infinito*). Como llegar a este resultado lo vimos en la clase auxiliar (es simple). Otra forma de obtener el resultado de la distancia total y bastante más corta propuesta en clase por varios estudiantes fue pensar en cuanto tiempo vuela el pájaro, la respuesta puede ser sencilla, el mismo que el barco esta navegando, ¿conocemos ese tiempo?, claro, pues el bote recorre una distancia d a velocidad v , es decir el tiempo de navegación será $t_* = \frac{d}{v}$ entonces la distancia recorrida por la gaviota es simplemente $t_* = d \frac{u}{v}$

Sí el pájaro parte desde el barco y no desde la orilla, ¿cambia el resultado?, analicen los casos límites para verificar si la expresión cumple los valores esperados.