FI10A. Control 4. 18-11-2004

Solución P1: (a) 1 pto. cada fuerza, 1pto. gráfico; (b) 2 puntos, (c) 2 puntos...

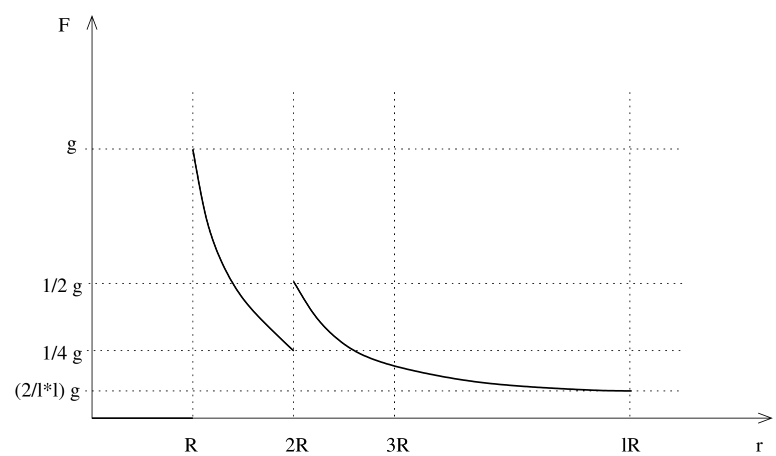
a. La única fuerza que consideramos en este problema es la atracción gravitacional. En adición a $F = GMm/r^2$ debemos emplear cuidadosamente los teoremas de Newton...

Cuando la nave esta fuera de la estación espacial, la nave siente el efecto de una masa puntual $2M$ a una distancia r. Entonces para $r = \lambda R$, $F = \frac{G(2M)m}{(\lambda R)^2} = \frac{2}{\lambda^2} g$, donde por simplicidad hemos considerado m=1 y $g = GM/R$ es la aceleración de gravedad sobre la superficie del cascaron interno.

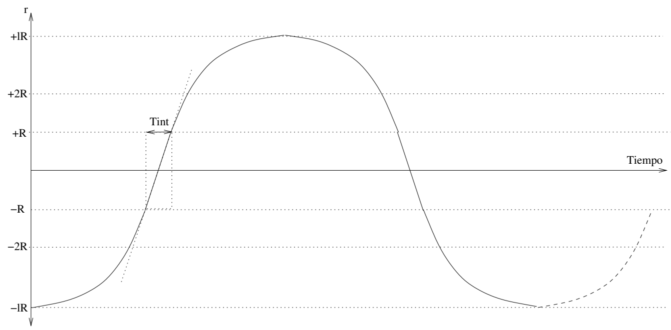
En la superficie del cascaron esférico (fuera de el): $F(r = 2R^+) = \frac{G(2M)m}{(2R)^2} = \frac{1}{2} g$.

Cuando la nave entra al interior del cacaron exterior deja de sentir el efecto de este, y solo actua la atracción del cascaron interno. Entonces, en la superficie interna la superficie del cascaron esférico: $F(r = 2R^-) = \frac{G(M)m}{(2R)^2} = \frac{1}{4} g$.

Analogamente, $F(r = R^+) = \frac{G(M)m}{R^2} = g$. Finalmente, cuando la nave entra al cascaron interno $F = 0$. El grafico resulta entonces:



b. De acuerdo al grafico anterior, la nave exprimentará un movimiento con aceleración variable, excepto en el interior del cascaron interno donde la rapidez será constante. El movimiento será oscilatorio (pero no armminco) con $r \in [-\lambda R, +\lambda R]$. En forma cualitativa, el gráfico resulta:



c. El tiempo de viaje dentro del cascaron interno es: $T_{int} = 2R/v_{int}$ donde vint es la velocidad constante que tiene la nave en ese sector. Para obtener ese valor, emplearemos conservación de energía entre la posición inicial de la nave (rapidez nula), la entrada al cascaron externo (vext), y luego entre ese punto y la entrada al cascaron interno. Notar el cambio de energía potencial gravitacional en la interface del cascaron externo:

$$-G\frac{2M}{\lambda R} = \frac{1}{2}v_{ext}^2 - G\frac{2M}{2R}$$

$$\frac{1}{2}v_{ext}^2 - G\frac{M}{2R} = \frac{1}{2}v_{int}^2 - G\frac{M}{R}$$

sumando las ecuaciones anteriores se obtiene $v_{int}^2 = G\frac{M}{R}(3 - \frac{4}{\lambda})$
con lo cual $T_{int} = 2R[G\frac{M}{R}(3 - \frac{4}{\lambda})]^{-1/2}$

2- a) $y(s,t) = A \,\text{sen}(ks+\varphi)\left[C \,\text{sen}\,\omega t + D \cos \omega t\right]$ (1)

$$\frac{\partial y}{\partial s} = A k \cos(ks+\varphi)\left[\ \cdot/\cdot\ \right] \quad (2)$$

Condiciones: $y(0,t) = y(L,t)$ (3) ; $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_{s=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_{s=L}$ (4) $\boxed{L = 2\pi R}$

$\therefore$ $A \,\text{sen}\,\varphi\,[\cdot/\cdot] = A\,\text{sen}(kL+\varphi)[\cdot/\cdot] \rightarrow \boxed{\text{sen}\,\varphi = \text{sen}(kL+\varphi)}$ (4)

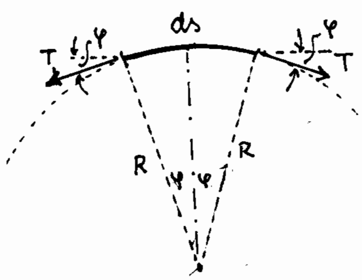
$A k \cos\varphi\,[\cdot/\cdot] = A k \cos(kL+\varphi)[\cdot/\cdot] \rightarrow \boxed{\cos\varphi = \cos(kL+\varphi)}$ (5)

De (4) y (5): $\varphi + 2n\pi = k_n L + \varphi \rightarrow$

$\therefore$ $k_n = \frac{2n\pi}{L}$; $\omega_n = \frac{2n\pi}{L} v$ $\rightarrow$ $\underbrace{\boxed{k_n = \frac{n}{R}}}_{(6)}$ y $\boxed{\omega_n = \frac{nv}{R}}$ (7)

$\therefore$ $y_n(s,t) = A\,\text{sen}(k_n s+\varphi)\left[C\,\text{sen}\,\omega_n t + D\cos\omega_n t\right]$ con $\boxed{s = R\theta}$

b)



Ec. de movimiento del elemento ds:

$2T\,\text{sen}\,\varphi = (\mu\, ds)\,\Omega^2 R$

Pero $ds = R\, 2\varphi$ y $\text{sen}\,\varphi \simeq \varphi$ (ángulo pequeño)

$\therefore$ $2T\varphi = 2\mu R^2\Omega^2\varphi \rightarrow \boxed{T = \mu R^2 \Omega^2}$ (8)

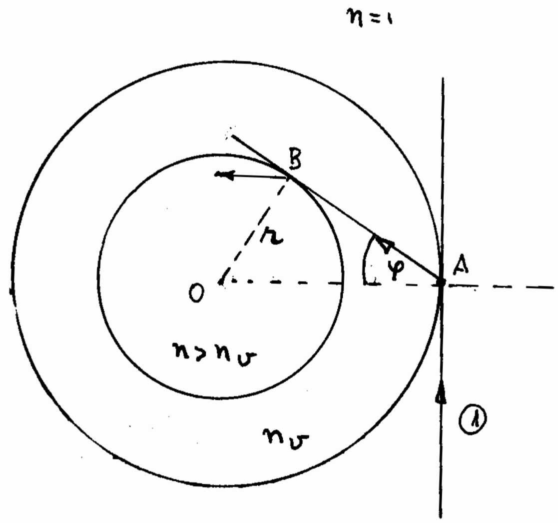
c) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow \boxed{v = R\Omega}$ (9)

De (7) y (9), con $n = 1$, $\rightarrow \omega_1 = \Omega$

Finalmente, $\omega_1 = 2\pi\nu_1 \rightarrow \Omega = 2\pi\nu_1$

Para $\nu_1 = 40\,\text{Hz}$ $\quad \Omega = 2\pi\cdot 40\,\text{Hz.} = 40\,\frac{\text{rev}}{s}$

③



$OA = R \quad ; \quad OB = r$

Rayo ① en posición más desfavorable

Snell : $1 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = n_v \cdot \operatorname{sen} \varphi$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{n_v}} \qquad (1)$$

Rayo AB, tangente círculo interior. Como $n > n_v$, el rayo refractado penetra en el líquido.

En ΔOAB : $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{r}{R}$

Luego, $\boxed{\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{n_v}}$

Geometría : 2 ptos

Snell en A : 1 pto

Cálculo de φ : 1 pto

Resto : 2 ptos.