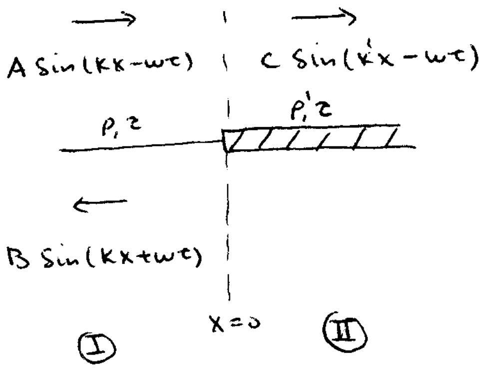
P] Asumiendo una onda incidente de la forma $A \sin(kx-\omega t)$

Determine la onda transmitida y reflejada.



$$y_i(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{onda incidente}$$

$$y_r(x,t) = B \sin(kx + \omega t) \quad \text{onda reflejada}$$

$$y_t(x,t) = C \sin(k'x - \omega t) \quad \text{onda transmitida}$$

donde $k = \dfrac{\omega}{\sqrt{\tau/\rho}}$, $k' = \dfrac{\omega}{\sqrt{\tau/\rho'}}$

Notar que la frecuencia ω de ψ_i, ψ_r y ψ_t debe ser la misma o si no en $x=0$ la cuerda se cortaría.

Por superposición:

$$y_I(x,t) = y_i + y_t$$
$$= A \sin(kx - \omega t) + B \sin(kx + \omega t)$$

$$y_{II}(x,t) = y_t$$
$$= C \sin(k'x - \omega t)$$

Condiciones de Borde:

(i) En $x=0$ $\quad y_I = y_{II}$

$$\Rightarrow \quad A \sin(-\omega t) + B \sin(\omega t) = C \sin(-\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad -A + B = -C$$

(ii) En $x=0$ $\quad \dfrac{\partial y_I}{\partial x} = \dfrac{\partial y_{II}}{\partial x}$

$$\Rightarrow \quad kA \cos(-\omega t) + kB \cos(\omega t) = k'C \cos(-\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad kA + kB = k'C$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -k & k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ kA \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$$B = \frac{k'-k}{k'+k} A$$

$$C = \frac{2k}{k'+k} A$$

Finalmente

$$y_r(x,t) = \frac{k'-k}{k'+k} A \sin(kx+\omega t)$$

$$y_t(x,t) = \frac{2k}{k'+k} A \sin(k'x-\omega t)$$

Se definen:

coeficiente de reflexión: $R \equiv \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{k'-k}{k'+k}\right)^2$ indica la razón de energía reflejada

Coeficiente de transmisión: $T \equiv \frac{k'}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k'}{k}\left|\frac{2k}{k'+k}\right|^2$

$$= \frac{4kk'}{(k'+k)^2}$$ indica la razón de energía transmitida

Notar que: $R + T = \left(\frac{k'-k}{k'+k}\right)^2 + \frac{4kk'}{(k'+k)^2}$

$$= \frac{1}{(k'+k)^2}\left[\underbrace{k'^2 - 2kk' + k^2 + 4kk'}_{(k'+k)^2}\right]$$

$$= 1$$

es decir, la energía se conserva

ejemplo: Si $\rho' = 2\rho$

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{T/\rho'}} = \frac{\omega}{\sqrt{T/2\rho}} = \sqrt{2}\,\frac{\omega}{\sqrt{T/\rho}} = \sqrt{2}\,k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_i(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \\ y_r(x,t) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} A \sin(kx + \omega t) \\ y_t(x,t) = \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} A \sin(k'x - \omega t) \end{cases}$$

En $x = 0$

$$\begin{cases} y_i(x=0,t) = -A \sin \omega t \\ y_r(x=0,t) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} A \sin \omega t \\ y_t(x=0,t) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}+1} A \sin \omega t \end{cases}$$