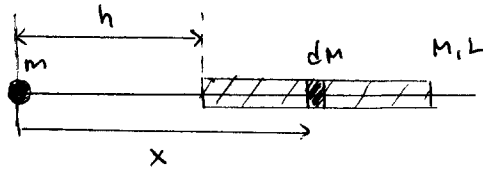


Guía de Gravitación en Medios Continuos

P1] Determine la fuerza que ejerce la barra de largo L masa M sobre la masa puntual m .



La fuerza que ejerce el elemento diferencial de masa dm sobre m es:

$$dF = \frac{G m dm}{x^2} \quad \text{pero } dm = \rho dx$$

↑ densidad lineal
de masa: $\rho = \frac{M}{L}$

$$\Rightarrow dF = \frac{G M m}{L} \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{G M m}{L} \int_h^{h+L} \frac{dx}{x^2}$$

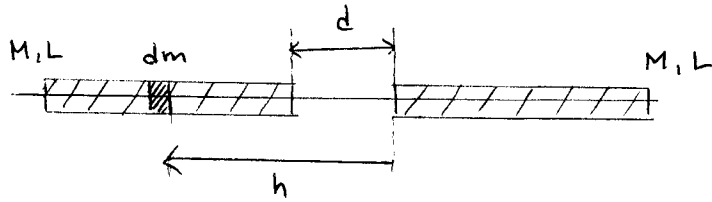
$$\frac{1}{x} \Big|_h^{h+L} = \frac{1}{h} - \frac{1}{h+L} = \frac{L}{h(h+L)}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{G M m}{h(h+L)}}$$

obs: Notar que cuando $h \gg L$

$F \approx \frac{G M m}{h^2}$ es decir, la barra se comporta como una masa puntual

P2] Determine la fuerza gravitacional existente entre dos barras idénticas de largo L y masa M
 hint: Use el resultado del problema anterior



Del problema anterior : $F = \frac{G M m}{h(h+L)}$

Ahora "es como" si tuviéramos muchas masas puntuales dm a una distancia h (que varía desde d hasta $d+L$).

$$\Rightarrow dF = \frac{G M dm}{h(h+L)} \quad \text{donde } dm = \underbrace{\rho}_{\frac{M}{L}} dh$$

$$\Rightarrow F = \frac{G M^2}{L} \underbrace{\int_d^{d+L} \frac{dh}{h(h+L)}}_I$$

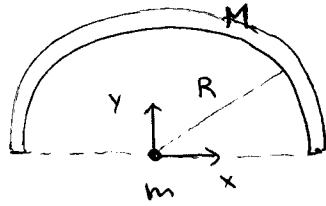
$$I = \int_d^{d+L} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+L} \right) \frac{1}{L} dh$$

$$= \frac{1}{L} \left(\ln(h) \Big|_d^{d+L} - \ln(h+L) \Big|_d^{d+L} \right)$$

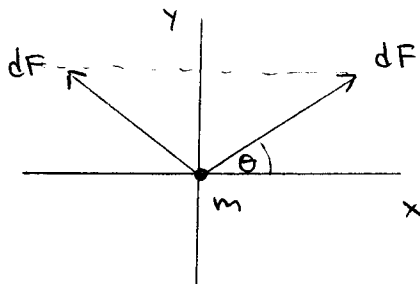
$$= \frac{1}{L} \ln \left(\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{G M^2}{L^2} \ln \left(\frac{(d+L)^2}{d(d+2L)} \right)}$$

P3] Determine la fuerza gravitacional que ejerce la semicircunferencia de masa M radio R sobre la masa puntual m .



Debido a la simetría, se sabe que sólo habrá una fuerza según \hat{y} .



$$d\vec{F} = 2 dF \sin \theta \hat{j}$$

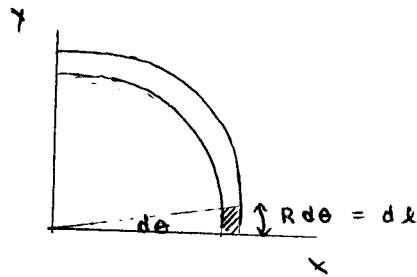
$$dF = \frac{G m dM}{R^2}$$

donde $dM = \rho dl$
 ρ es la densidad lineal de masa
 dl es el elemento diferencial de línea

$$\rho = \frac{M}{\pi R}$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = \frac{2 G M m \sin \theta}{\pi R^3} dl \hat{j}$$

pero $dl = R d\theta$



$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{2 G M m}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \hat{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{2 G M m}{\pi R^2} \hat{j}}$$