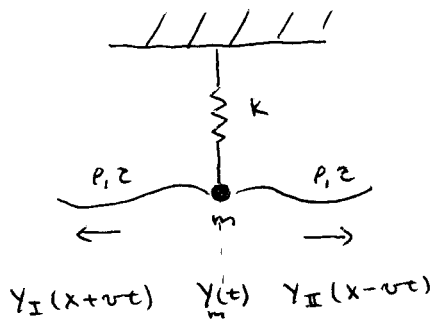


P2] (Aux 29/10/2004)

Determine la ecuación de movimiento para m .



donde

$y_m(t)$: posición (altura wr pto equilibrio) de la masa m .

$y_I(x+vt)$: Onda viajera hacia la izquierda

$y_{II}(x-vt)$: Onda viajera hacia la derecha

Condiciones de Borde en $x=0$

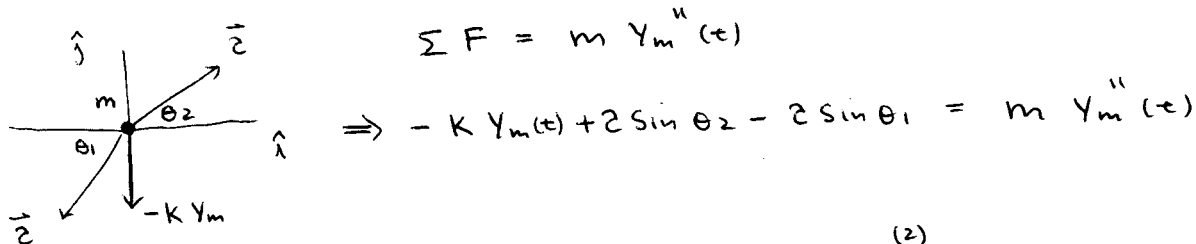
$$(i) \quad y_I|_{x=0} = y_{II}|_{x=0} = y_m(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_I(vt) = y_m(t) \\ y_{II}(-vt) = y_m(t) \end{cases}$$

Aplicando $\frac{d}{dt}$ en ambas ecuaciones

$$\Rightarrow \begin{cases} v y_I'(vt) = y_m'(t) \rightarrow y_I'(vt) = \frac{1}{v} y_m'(t) & (1) \\ -v y_{II}'(-vt) = y_m'(t) \rightarrow y_{II}'(-vt) = -\frac{1}{v} y_m'(t) & (2) \end{cases}$$

(ii) Newton para m en $x=0$



$$\Rightarrow -k y_m(t) + 2 \sin \theta_2 - 2 \sin \theta_1 = m y_m''(t)$$

Pero $\sin \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{\partial y_{II}}{\partial x} \Big|_{x=0} = y_{II}'(-vt) \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{v} y_m'(t)$

$$y \sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{\partial y_I}{\partial x} \Big|_{x=0} = y_I'(vt) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{v} y_m'(t)$$

Entonces,

$$-K y_m(t) - \frac{2\gamma}{v} y_m'(t) = m y_m''(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{m y_m''(t) + \frac{2\gamma}{v} y_m'(t) + K y_m(t) = 0} \quad \text{oscilador armónico con disipación}$$

$$\text{donde } v = \sqrt{2/p}$$

Extra

Encontremos la solución a la ecuación anterior

Ansatz: $y_m(t) = e^{\lambda t}$; λ cte por determinar

reemplazando en la ecuación: $m\lambda^2 + \frac{2\gamma}{v}\lambda + K = 0$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\gamma}{mv} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad \underbrace{\frac{K}{m}}_{\equiv \omega_0^2}$$

Existen 3 tipos de soluciones:

- si $\omega_0^2 < \left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2$ solución sobreamortiguada
- si $\omega_0^2 = \left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2$ solución críticamente amortiguada
- si $\omega_0^2 > \left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2$ solución subamortiguada

Sólo estudiaremos el último caso: $\omega_0^2 > \left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\gamma}{mv} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2}$$

Entonces, existen dos soluciones: $e^{-\frac{\gamma t}{mv}} e^{i\omega t}$ y $e^{-\frac{\gamma t}{mv}} e^{-i\omega t}$

En general, $y_m(t)$ se escribirá como una combinación lineal de esas dos soluciones

$$\Rightarrow y_m(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{mv}} e^{i\omega t} + c_2 e^{-\frac{\gamma t}{mv}} e^{-i\omega t} \quad c_1, c_2 \text{ ctes complejas}$$

$$= e^{-\frac{\gamma t}{mv}} \left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \right)$$

Se puede escribir de la forma $A \cos(\omega t + \phi)$
(imponiendo que $y_m(t)$ sea real)

$$\Rightarrow \boxed{y_m(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{mv}} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{mv}\right)^2} t + \phi\right)} \quad A, \phi \text{ ctes que dependen de las condiciones iniciales}$$